3月22日 上午11:47

定积分(1)

一、记号：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{|T|\to 0} \sum f(x_i)\Delta x_i$ (I) $\boxed{\text{Riemann和}}$

注，① 与|T|与x_i取法无关

② 只与f、[a,b]有关

③ 与积分变量无关：$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

⇒ 几何、物理意义. $\begin{cases} x\text{轴上方 } I>0. \\ x\text{轴下方 } I<0. \end{cases}$

几何：由$x=a$、$x=b$、x轴及$y=f(x)$所围面积"代数"和

物理：位移、做功等

规定：$\int_a^a f(x)\,dx = 0$. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

当f不可数无穷时不一定成立

$\int_a^b f(x)\,dx \to$ 常数、$\int f(x)\,dx \to$ 函数.

二、牛顿－莱布尼茨公式

$f \in C[a,b]$，且∃原函数F ⇒ $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$

(可不加)

可从"物理"方面：

$S(a) - S(b) = \int_a^b v(t)\,dt$. 其中S为路程，故S为$v(t)$原函数

Proof：把"$F(b)-F(a)$"进行分割"T"：$F(b) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_1) - F(a)$

$\Rightarrow \sum [F(x_i) - F(x_{i-1})] \overset{\text{Lagrange}}{=\!=\!=} \sum f(\eta_i)\Delta x_i$ (其中η_i取区间中间)

∴ $|T| \to 0$时 $\int_a^b f(x)\,dx = $ "$\lim\limits_{|T|\to 0} \sum f(\eta_i)\Delta x$" $= F(b) - F(a)$.

若令 $\int_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{|T|\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow |\sum f(\eta_i) - f(\xi_i)\Delta x_i|$

$= \sum |f(\eta_i)-f(\xi_i)|\Delta x_i < \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\sum \Delta x_i\right) = \varepsilon$.

$\because$ η_i 与 $\xi_i \in U(x_0)$.
$\therefore$ 由 $f \in C[a,b]$
$\Rightarrow f$ 一致连续
$\Rightarrow |f(\eta_i)-f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

注：本定理条件可减弱：

① 只需 $f \in C[a,b]$ 在 (a,b) 上可导. $F(x) = f(x)$.

"η_i" 由 Lagrange 只取中间，不取端点。

② $f \in C[a,b]$ 可改为 $f \in R[a,b]$.

三、可积条件

1、必要条件：$\to$ { 区间 $[a,b]$ 有界；函数在 $[a,b]$ 有界 }

Thm1：正常积分下有界，反常积分不一定：$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}\Big|_0^1 = 1$，但无界 $(x=0)$

Proof：反设无界 $\therefore \exists [x_i, x_{i-1}]$ s.t. $f(x)$ 无界，$\forall x \in [x_i, x_{i-1}]$

$\because \left|\sum f(x_i)\Delta x_i\right| \geqslant \underbrace{\left|\sum_{j\neq i} f(x_j)\Delta x_j\right|}_{设为M} - |f(x_i)\Delta x_i|$，又 $f(x_i)$ 无界" $\therefore \forall M = \frac{M-}{\Delta x_i}$

$> \varepsilon$.

$\therefore$ 与可积矛盾！ $\therefore$ 必有界.

注：有界不一定可积 $\Rightarrow D(x)$ 不可积（$\xi_i \in Q$. $\int = 1$；$\xi_i \in Q^c$. $\int = 0$）

Riemann 函数可积。

（直观：当 $|T|$ 取足够小时 f 近似不变
即"振幅"很小，则可积。
而 $D(x)$ 不管怎么分都有"振幅" $=1$.）

2、充要条件

达布和：{ $S(T) = \sum M_i \Delta x_i$；$s(T) = \sum m_i \Delta x_i$ }.

$M_i = \sup f(x_i)$. $m_i = \inf f(x_i)$

$\Rightarrow s(T) \leq \sum f(\eta_i)\Delta x_i \leq S(T)$.

$\therefore$ 夹逼：当 $\lim S(T) = \lim s(T) \Rightarrow$ 可积.

Thm1：可积 $\Leftrightarrow S(T) - s(T) < \varepsilon$ $(\forall \varepsilon > 0, \exists T)$

Thm2：可积 $\Leftrightarrow \sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

Def：振幅为 $M_i - m_i = \omega_i$.
$\omega_i = \sup|f(x_i) - f(x_i')|$.

☆ 拓展第三充要条件：

① $\forall \varepsilon, \eta$，振幅小于 η 的区间总长小于 ε. 则 $f \in R$

② Lebesgue Thm.

③ 几乎处处成立

④ 零测度集

3、充分条件：难点："ξ_i"与分割"T"的取法任取

针对"ξ"的任意性 $\Rightarrow$ 达布和 sup 与 inf.

$S(T) - s(T) = \sum \omega_i \Delta x_i$.

Thm 1. $f \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $\forall T, |T| < \delta$ 时，$S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Thm 2. $f \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 T_0. s.t. $S(T_0) - s(T_0) < \varepsilon$.

引理："大和不增"，"小和不减" $(S(T) \geqslant S(T') \geqslant S(T) - p(M-m)|T|)$

Proof: 2 ⇒ 1 对 $\forall T$: $S(T+T_0)-s(T+T_0)\le S(T_0)-s(T_0)<\varepsilon$.

又 $\left.\begin{array}{l} S(T)\le S(T+T_0)+p(M-m)|T| \\ s(T)\ge s(T+T_0)-p(M-m)|T| \end{array}\right\} S(T)-s(T)\le \varepsilon+2p(M-m)|T|$.

令 $|T|<\varepsilon/2p(M-m)\Rightarrow S(T)-s(T)<2\varepsilon$.　　针对"T"的任取。

Proof: Thm 1:

回忆可积定义:　　引理: ∵ $S(T)$、$s(T)$ 有界 $\xrightarrow[\text{Thm}]{\text{确界}}$ Def: $S=\inf\limits_{T} S(T)$, $s=\sup\limits_{T} s(T)$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall T$ 当 $|T|<\delta$, 有 $\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$.

"⇐" 先证: "$S=s$" ∵ $S-s\le S(T)-s(T)<\varepsilon$.

又 ∵ $\forall\varepsilon \Rightarrow S=s$

再令 $S=s=J$, 下证: $\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$.

∵ $\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|=\boxed{\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i-S(T)+S(T)-S\right|}$

$\le\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i-S(T)\right|+\underline{|S(T)-S|}$

$\le 2(S(T)-s(T))<2\varepsilon$.　　↳ $\underline{S(T)-S=S(T)-s\le S(T)-s(T)}$

"⇒" $S(T)-s(T)=S(T)-J+J-s(T)<2\varepsilon$.

4. 可积函数.

Thm $\begin{cases} f\in C\Rightarrow f\in R \\ f\ \text{有限个间断点}\Rightarrow f\in R \\ f\ \underline{\text{单调}}\Rightarrow f\in R \end{cases}$

→ 无限个间断点 ⇒ "聚点" ⇒ <u>有限</u>个聚点, $f\in R$
(间断点构成收敛列)

↓

单调函数至多<u>可列个</u>间断点且为第一类

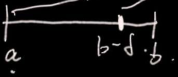
★ ⇒ 推广: ① f 有界, 且可列个间断点 ⇒ $f\in R$ ②. 间断点可用总长度任意 δ 的可列个区间包住则 $f\in R$.

Proof: 1. $f\in C\Rightarrow f$ <u>一致连续</u> $\Rightarrow |f(x_i)-f(x_j)|<\varepsilon/b-a$

∴ $S(T_0)-s(T)=\sum\sup|f(x_i)-f(x_j)|\Delta x\le\varepsilon$

2. 只证"一个间断点"的情形. 不妨设为区间端点"b".

将 $[a,b]$ 分为 $[a,b-\delta]$、$[b-\delta,b]$, $\delta=(M-m)^{-1}\cdot\varepsilon$



2. $[a,b-\delta]\ f\in C \Rightarrow f\in R$

$[b-\delta,b]$ 中 $\sum W_i\Delta x_i \le (M-m)\cdot\delta=\varepsilon$

$\therefore [b-\delta,b]$，$f\in R \Rightarrow [a,b]\ f\in R$

3. $W_i \le f(x_i)-f(x_{i-1})$，令 $\delta=\cancel{\varepsilon}\ f(b)-f(a)$

$\therefore \sum W_i\Delta x_i \le \sum[f(x_i)-f(x_i)]\Delta x_i \le \sum[f(x_i)-f(x_{i-1})]|T|$

$=(f(b)-f(a))|T|=\varepsilon$

思考、无限个间断点？，$\boxed{\text{可列个}}$？

↳ 必有$\boxed{\text{聚点}}$

引：

$\sum W_i\Delta x_i \le \sum W_i|T|$ or $W(b-a)$.（W为振幅max）

夹逼 ⇒ ① W_i有界时，$|T|\to0 \Rightarrow \sum W_i\Delta x_i\to0$.

② $b-a$有界时 $W\to0 \Rightarrow \sum W_i\Delta x_i\to0$

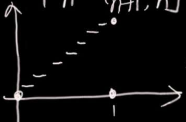
Thm：f有可列个间断点，且聚点有限个，则 $f\in R$.

⇓

间断点形成的点列有极限也可

Ex：$f=\begin{cases}1 & x=1\\ \frac{1}{n} & (\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\end{cases}\in R[0,1]$

如图：



⇒ 间断点：$\frac{1}{i}$（$i=2,3,\cdots,n$）仅有1聚点"0"

但 $f\in R[0,1]$（f为单调的，$f\in R$）

Proof：$\begin{cases}f>\frac{\varepsilon}{2}\text{的间断点只有有限个（法一）}\\ \text{将}x\text{分为}[0,\frac{\varepsilon}{2}],[\frac{\varepsilon}{2},1]\text{（法二）}\end{cases}$

Ex：Riemann函数可积 $\begin{cases}1/q & x=\frac{p}{q}\\ 0 & x=0\\ 1 & x=1\end{cases}$ ⇒ 回忆：无理点连续

有理点间断

图

½
$\frac{\varepsilon}{2}$

且 $\int_a^b R(x)dx=0$

$\le |T|\sum W_i$.　　$\le \frac{\varepsilon}{2}\sum\Delta x_i$.

Proof：$\underset{\downarrow\ \text{有限个间断点}}{\underline{R(x)>\frac{\varepsilon}{2}}}$ 与 $R(x)\le\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\sum\omega_i\Delta x_i=\underset{\downarrow\ \text{有限个间断点},\ \omega\text{有界}}{\sum\omega_i\Delta x_i}+\underset{\downarrow\ \sum\Delta x_i\text{有界}}{\sum\omega_i\Delta x_i}<\varepsilon$.

Thm：$\forall x$，$\exists g\in R$，s.t $|f-g|<\varepsilon$，则 $f\in R$.

（注意：$f_n=\begin{cases}n & [0,\frac{1}{n}]\\ 0 & x=0、(\frac{1}{n},1]\end{cases}$）

四、性质

1. 线性性：$f.g\in R$，则 $k_1g+k_2f\in R$.

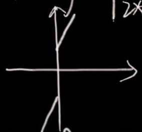
2. 区域可加性. $f\in R[a,b]$，则 $f\in R[a,c]$，$R[c,b]$.
   $(a<c<b$ or $c<a$，$c>b)$ 附：该Thm逆命题也正确 ⇒ 可证"分段连续"函数 $\in R$

3. 比较性：$f.g\in R$，$f\ge g$，则 $\int_a^b f\,dx\ge\int_a^b g\,dx$（且 $a\le b$）
   推：若 $f\ge 0$，$f\in R$，则 $\underline{\int_a^b f\,dx\ge 0}$
   论 $\begin{cases}\text{若 } m\le f(x)\le M,\ f\in R,\ \text{则 } m(b-a)\le\int_a^b f\,dx\le M(b-a)\\ \text{若 } f\in R,\ \text{则 } |f|\in R,\ \text{且 } \underline{\left|\int_a^b f\,dx\right|\le\int_a^b|f|\,dx}\end{cases}$（反之不成立 ⇒ $f=\begin{cases}1 & \mathbb{Q}\\ -1 & \mathbb{Q}^c\end{cases}$

4. f.g 为正常积分，$f.g\in R$，则 $f\cdot g\in R$（反：$f=g=$狄）但 $|f|=1\in R$）

5. 复合：外"函数可积"，内函数"连续"（在 $[a,b]$）
   注：在 (a,b) 不一定如：$g=\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$，$f=x$ 但 $f\circ g\notin R$
   约定：① $\int_a^b f\,dx=-\int_b^a f\,dx$. ② $\int_a^a f\,dx=0$.

Ex：$f=\begin{cases}2x-1 & [-1,0)\\ 2x+1 & [0,1]\end{cases}$ 求 $\int_{-1}^1 f\,dx$.



$$\int_{-1}^1 f\,dx=\int_{-1}^0 f\,dx+\int_0^1 f\,dx.$$

Ex：$f\in C[a,b]$. $f\ge 0$. 则 $\int_a^b f(x)\,dx=0\Leftrightarrow f\equiv 0$.

Proof："⇒" 反设 $\exists x_0$. s.t $f(x_0)\ne 0$. 局部保号：$f(x_0)>0$.
$\therefore U(x_0)$ $f\ne 0$.（>0）
故 $\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\underline{f(x)\,dx>0}$. 矛盾！
$\hookrightarrow$ 不妨 $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$，$x\in U(x_0;\varepsilon)$

（细节：
$x_0-\varepsilon\le a$ 时. 令 $x_0-\varepsilon=a$
$x_0+\varepsilon\ge b$ 时. 令 $x_0+\varepsilon=b$

"⇐" $f\equiv 0$ $\therefore\int_a^b f(x)\,dx=0$.

积分中值定理:

$$\therefore \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx > \frac{f(x_0)}{2}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx = f(x_0)\varepsilon > 0.$$

Thm 1: 第一定理: $[a,b]$

$f \in C[a,b]$. $\exists\, \xi \in (a,b)$ s.t $\underline{f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \rightarrow \boxed{平均值}$

or $\underline{\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)}$ 直观: $S_{曲边梯形} = S_{长方形}$

Proof: $\because f \in C[a,b]$ $\therefore f$ 有 M, m.

$$\therefore \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx.$$

$$\therefore \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \in [m, M].$$

$$\therefore \exists\, \eta \in [m, M] \text{ s.t } f(\xi) = \eta \quad \text{s.t. } \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi) = \eta$$

法一 $\therefore \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

下证 $\xi \in (a,b)$: ① $m = M \Rightarrow f \equiv C$ $\therefore \forall \xi$ 即可

② $m < M$, 且 $\eta \in (m, M)$, 则 $\xi \in (a,b)$

③ $m < M$ 且 $\eta = m$ $\because f(x) - m \ge 0$

$$\therefore 0 = \int_a^b f(x)\,dx - f(\xi)(b-a) = \int_a^b (f(x) - m)\,dx$$

$\therefore f(x) \equiv m \Rightarrow \forall \xi \in (a,b)$ 均可

法二: ② 令 $f(c) = m$, $f(d) = M$, 且 $c < d$.

$\therefore \forall\, m < r < M$, $\exists\, x_0 \in (c,d)$ s.t. $f(x_0) = r$.

$\therefore$ 由局部保号, $\exists\, U(x_0;\delta)$ s.t $\forall x \in U$. $f(x) \in (m, M)$

$$\therefore \int_a^b f\,dx = \underline{\int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^{b}}\ \downarrow$$

$$m < \frac{\int_a^b f\,dx}{b-a} < M \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} > m(x_0-\delta-a) + 2m\delta + m(b-x_0-\delta) = m(b-a) \\ < M(x_0-\delta-a) + 2M\delta + M(b-x_0-\delta) = M(b-a) \end{array}\right.$$

$\therefore \exists \eta \in (m, M)$ s.t $\eta = f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, $\xi \in (a,b)$.

推广: $f \in C[a,b]$. $g \in R[a,b]$. $g \geq 0$.

则$\exists \xi \in (\underset{\triangle}{a}, \underset{\triangle}{b})$. s.t. $\int_a^b fg\,dx = f(\xi)\int_a^b g\,dx$.

注: "$g \equiv 1$"时, 即为Thm1

Proof: $mg \leq fg \leq Mg \Rightarrow m\int_a^b g\,dx \leq \int_a^b fg\,dx \leq M\int_a^b g\,dx$

$\therefore m \leq \frac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g\,dx} \leq M$. $\therefore$令 $\eta \in [m,M]$. $\eta = f(\xi)$. $\xi \in [a,b]$ s.t $f(\xi)\int_a^b g\,dx = \int_a^b fg\,dx$.

下证: $\xi \in (a,b)$

① $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Rightarrow g(x) \equiv 0$ $\therefore \forall \xi$

② $m = M$ $\because f \equiv C$ $\therefore \forall \xi$

③ $m < M$ 且 $\eta \in (m,M)$ $\therefore \xi \in (a,b)$

④ $m < M$ 且 $\eta = m$ 且 $\int_a^b g(x) > 0$ 时:

$\because \int_a^b g(x)\,dx > 0 \Rightarrow \exists [c,d]$ s.t. $\int_c^d g(x)\,dx \geq u > 0$.

又 $f(x) - m \geq 0$. $0 = \int_a^b (f(x)-m)g(x)\,dx \geq \int_c^d (f(x)-m)g(x)\,dx$

$\geq u\int_c^d (f(x)-m)\,dx \geq 0$.

$\therefore \int_c^d (f(x)-m)\,dx = 0$ $\therefore [c,d]$上 $f \equiv m$

$\therefore \forall \xi \in [c,d] \subset (a,b)$即可

Ex1. 求 $\sin x$ 于$[0,\pi]$平均值.

Ex2: 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+2} t \sin\frac{3}{t} f(t)\,dt$, $f \in C$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

原式 $= \lim\limits_{x \to +\infty} \xi \sin\frac{3}{\xi} f(\xi) \cdot 2 = \lim\limits_{\xi \to +\infty} \xi \sin\frac{3}{\xi} f(\xi) \cdot 2 = 6a$.

[redacted]

4月19日 中午12:10

凸不等式与积分不等式

1. 广义的算术平均值-几何平均值不等式

$x_i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$. 则: $\prod x_i^{\lambda_i} \leq \sum \lambda_i x_i$.

Proof: ∵ lnx 为上凸函数 $f(x) = \ln x$.

∴由Jensen不等式: $f(\sum \lambda_i x_i) \geq \sum \lambda_i f(x_i)$.

$\Rightarrow \ln \sum \lambda_i x_i \geq \ln \prod x_i^{\lambda_i}$.

又 lnx 为↑ ∴ $\sum \lambda_i x_i \geq \prod x_i^{\lambda_i}$.

2. Hölder不等式:

x_i与$y_i \geq 0$, $p>1$, $q>1$, 且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proof: 令 $f(x) = x^p$ ∴ f(x)下凸.

令$\lambda_i = \frac{y_i^q}{\sum y_i^q}$ $u_i = x_i y_i^{1-q}$.

∴ $f(\sum \lambda_i x_i) \leq \sum \lambda_i f(x_i)$

$$\Leftrightarrow \left(\sum \frac{y_i^q}{\sum y_i^q} \cdot x_i y_i^{1-q}\right)^p \leq \sum \frac{y_i^q}{\sum y_i^q} x_i^p \cdot y_i^{p-pq}.$$

又 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow p+q-pq=0$ ∴ $p-pq=-q$.

$$\therefore \Leftrightarrow \left(\frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^q}\right)^p \le \frac{\sum x_i^p}{\sum y_i^q}$$

$$\Leftrightarrow \sum x_i y_i \le \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3、Minkowski不等式：

$x_i, y_i \geq 0,\ p \geq 0$. 则 $\left(\sum (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Proof：令 $f(x) = (1-x^{\frac{1}{p}})^p$ ∴ $f(x)$ 下凸.

令 $\lambda_i = \frac{(x_i+y_i)^p}{\sum (x_i+y_i)^p}$, $u_i = \left(\frac{x_i}{x_i+y_i}\right)^p$.

$\therefore f(\sum \lambda_i u_i) \geq \sum \lambda_i f(u_i)$

$$\Leftrightarrow \left(1-\left[\frac{\sum x_i^p}{\sum (x_i+y_i)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^p \le \sum \frac{(x_i+y_i)^p}{\sum (x_i+y_i)^p} \cdot \underset{\displaystyle \frac{\sum y_i^p}{\sum (x_i+y_i)^p}}{\underset{\parallel}{\left(1-\left[\frac{x_i^p}{(x_i+y_i)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^p}}$$

即证.

4、Bernoulli 不等式

$$x>-1\text{时} \begin{cases} \alpha<0,\ \alpha>1: & (1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \\ 0<\alpha<1: & (1+x)^\alpha \le 1+\alpha x \end{cases} \quad (x=0 \text{ 取“=”})$$

Proof：对 $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow \begin{cases} 0<\alpha<1 & \text{上凸} \\ 1<\alpha,\ \alpha<0. & \text{下凸}. \end{cases}$$

5. Jensen不等式(略).

6. $AB \le \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q$. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. $p\geq 1, q\geq 1$. $A, B \geq 0$.

Proof：$\Leftrightarrow \frac{1}{p}\ln A^p + \frac{1}{q}\ln B^q \le \ln\left(\frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q\right)$ 又 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

∴ 由琴生不等式及 $\ln x$ 上凸 代入即可

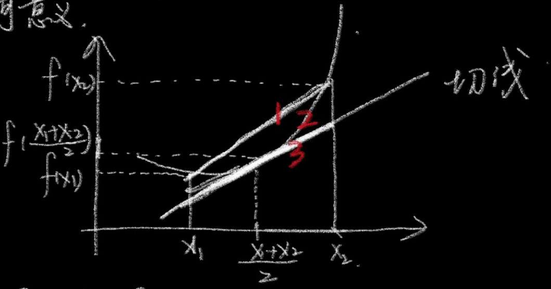
积分不等式:

1. Hadamard(不等式)

f为(a,b)上的下凸函数,则∀x_1, x_2, $x_1<x_2$有:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{x_1-x_2}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

①几何意义.



$\therefore S_1 \ge S_2 \ge S_3$.

② proof: 令 $u_1 = x_1+\lambda(x_2-x_1)$. $u_2 = x_2-\lambda(x_2-x_1)$. $\lambda_i = \frac{1}{2}$.

∴由f为下凸及Jensen不等式

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}u_1+\frac{u_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}f(u_1)+\frac{1}{2}f(u_2)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left[f(x_1+\lambda(x_2-x_1))+f(x_2-\lambda(x_2-x_1))\right]$$

对λ求积分($\lambda\in[0,1]$)

$$\therefore f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \Big/ x_2-x_1$$

又 $\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \int_0^1 f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\,d\lambda \le \int_0^1 \lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)\,d\lambda$

$$= \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

③ 若 $\forall x_i$, 取等号（任何一边）

2. Jensen 不等式：$f(\varphi$平均值$) \le f(\varphi)$平均值. （f下凸）

即：$$f\left(\frac{1}{\int_a^b g(t)dt}\int_a^b \varphi(t)g(t)\,dt\right) \le \frac{1}{\int_a^b g(t)dt}\int_a^b f(\varphi)g\,dt.$$

特别地：$g \equiv 1$.

① $$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\,dt\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(t))\,dt.$$

② $$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx. \quad (f=\ln x)$$

3. Cauchy-Schwarz 不等式

（内积不等式）

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Proof: （$\int_a^b f(x)g(x)dx$ 定义为 个 双线性型 $\underline{\varphi(f,g)}$）

法一：令 $\int_a^b (\lambda f(x)-g(x))^2 dx \ge 0$.

由 $\Delta \le 0$ 得出

法二：已由 Cauchy 不等式：$(\sum a_i b_i)^2 \le \sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2$.

令 $x_i = a+\frac{i}{n}$. $\therefore \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)\right)^2 \le \frac{1}{n}\sum f^2(x_i)\cdot\frac{1}{n}\sum g^2(x_i)$

令 $n\to\infty$ 取极限即可.

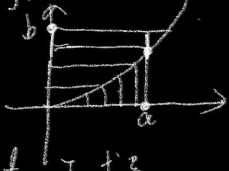
4. Young 不等式

设 f 于 $[0,+\infty)$ 连续可导且严格↑, $f(0)=0$, $a,b>0$, 则：

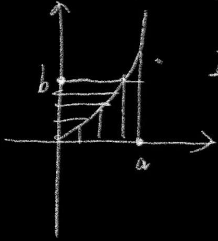
$$ab \le \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy. \quad (\text{“=” 当 } b=f(a) \text{ 时})$$

① 几何意义.

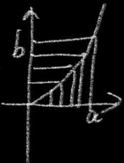
I.



II.



III.



② Proof、 I、求导

II. $I = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy$

$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^{f^{-1}(b)} x\,d f(x)$

$= \int_0^a f(x)dx + x f(x)\Big|_0^{f^{-1}(b)} - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx$

$= b f^{-1}(b) + \int_{f^{-1}(b)}^{a} f(x)dx = b f^{-1}(b) - \int_a^{f^{-1}(b)} f(x)dx.$

$\begin{cases} a > f^{-1}(b) \\ a < f^{-1}(b) \end{cases}$ ⇒ 均可得到 Young

$a = f^{-1}(b)$ ⇒ 取"="

5. Hölder不等式.

$$\left(\int_0^b |fg|dx\right) \le \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

6. Minkowski不等式, $1 \le p < +\infty$.

$$\left(\int_a^b (|f|+|g|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

注: Hölder中 ① $p=q=2$ 即 Cauchy-Schwarz不等式

② $g \equiv 1$ 时、$[a,b]$有界时:

$$\left|\int_a^b f dx\right| \le \left(\int_0^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{q}}.$$

则对 L-P空间: $\{f \mid 0 < \int_0^b |f|^p dx < +\infty\}$.

若 $p_1 < p_2$ 则 $L_{p_1} \supset L_{p_2}$.

[redacted]