珞珈數學

Luojia Mathematics

数学基地班联谊会
2011.1

珞珈数学

——纪念李国平院士诞辰 100 周年特别刊

序

——李国平院士诞辰一百周年纪念与铜像落成仪式祭文

怀俊　常倬

巍巍南岭	滔滔东江	梅州丰顺	大师发祥
一九一零	孟冬临降	少年聪慧	业勤志强
名师指点	学海徜徉	中大才子	初试锋芒
立志攀登	留学东洋	文理兼长	函数巨匠
会所讲演	举座惊堂	高人举荐	游学法邦
创新理论	泰斗褒奖	东方才俊	名动西洋
立志报国	毅然返乡	川大武大	声震讲堂
喜迎红日	全国解放	倾心尽力	宏图共创
京师办班	微分发扬	后学培育	学界赞赏
院士选评	得中首榜	科学盛举	慨当以慷
受聘东德	解析辞章	国际会友	柏林翱翔
组建院所	率众征航	力主应用	南北共倡
一主两翼	研发妙想	精心策划	服务国防
数学物理	开辟新疆	教育改革	乘风破浪
教书育人	矢志不忘	科学春天	老当益壮
创刊复所	谱写新章	武大科院	双肩担纲
传道授业	桃李芬芳	科苑讲坛	铸就辉煌
三套丛书	学术传扬	论文百篇	智慧闪光
研学专著	与身同长	学贯中西	通今博往
甲等劳模	省市褒奖	全国人大	三届言畅
博学多艺	文理双强	诗词书画	流韵生光
高山比肩	江河竞长	百年缅怀	伏惟尚飨

目录

纪念李国平院士诞辰 100 周年文选

在李国平先生百年诞辰纪念大会上的发言

复旦大学　李大潜院士

李国平先生是我非常敬仰的前辈数学家。作为一个受过他热情关爱、指点和提携的后辈，我很高兴能有机会参加这样一个盛会，和大家一起纪念李国平先生诞辰 100 周年。

李国平先生不仅是一位著名的数学家，而且诗词与书法同样功力深厚、出类拔萃。他文理相通，集数学家、诗人与书法家于一身，和苏步青老师颇为相似，他们两人也总是互相推崇与信任，常有诗词唱和。苏步青老师于 1980 年受教育部委托创建《数学年刊》，李国平先生大力相助，担任了副主编，并一直热情关心、鼓励和支持年刊的工作，为我们这些年轻的编委做出了很好的榜样。1984 年，年刊的常务编委扩大会在我的家乡江苏省南通市举行，李国平先生不顾年迈体弱，克服重重困难欣然与会，住在位于濠河之滨、风景如画的文峰饭店。他不仅认真参加了全部会议，而且豪情满怀地游览了狼山、啬公墓等名胜古迹，留下了不少动人的诗篇。在南通逗留期间，由于在诗词和书法方面的共同爱好和修养，我父亲和李国平先生相见恨晚、喜遇知音。李国平先生回武汉时，我父亲曾以五言诗送别，李国平先生很快同样以五言诗依韵回复，还写了一首"渡江云"词给我的父亲。后来，李国平先生又将他新作的七言绝诗一百首寄到南通，我父亲很快就步原韵作诗一百首作和，一时传为佳话。李国平先生酷爱书法，出差时也随身带着文房四宝，好几次向他索赠墨宝，他总是有求必应，而且很快兑现诺言，从不拖拉敷衍。他那挺拔秀丽、清新脱俗的书法，连同他那热情豪爽、平易近人的个性和风格，都永远地留在我们的记忆中了。

李国平先生在半纯函数理论及微分方程解析理论等方面多有深入的贡献，给人留下

了深刻的印象，但给我印象更为深刻的，是他作为一名数学家，尽管功成名就，但决不因循守旧，更不止步不前，而是充满了诗人的激情和遐想，满腔热情并坚持不懈地探索未知，锐意创新，先后开拓了数学物理及系统科学中的众多领域，并做出了自己独特的贡献。我记得 1982 年在武汉参加中国数学会年会的时候，曾听过李国平先生所做的一个大会报告。他在报告中别出心裁地引入了一类新的积分，为与原来的积分相区别，他把通常积分的记号 $\int$ 反过来，将这种积分记为"$\reflectbox{$\int$}$"。我才疏学浅，当时没有听懂他的报告，事后也没有进一步深究这种积分与普通积分到底区别在哪里？意义究竟何在？但李国平先生思想之解放，创新意识之强烈，不能不使我赞叹。我想，李国平先生的一些富有启发性的思考，应该是一个丰富的遗产和宝藏，值得认真重视并深入挖掘，使其生根发芽、开花结果，这才是对李国平先生的一个更好的纪念。1995 年 11 月，我在珞珈山顶参加全国研究生工作的一个会议，曾专门下山看望李国平先生。他见我来很高兴，和我谈了很多他在数学方面的思考，还特别告诉我，他在一份典籍中发现了曾经实际上使用了三进制的证据。从数学史及数学文化的角度看，这自然是一个极为重要的发现，但当时他谈兴正浓，我没有来得及细问，总想以后有机会还可以向他详细了解，但想不到一别竟成永诀：不到三个月，李国平先生就因病而与世长辞了！对于三进制实际运用的这一发现，我不知还有没有抢救的可能？如果无人知晓，恐将成为绝唱了。

李国平先生对理论联系实际的方针是倾心拥护的，恐怕也是贯彻这一方针的一个激进派。关于理论与实际关系的大辩论，在上世纪五、六十年代的数学界是一件大事，是作为一场政治运动来搞的，到了文化大革命更是达到登峰造极的地步。当时辩论的双方，从今天的观点来看，恐不免都会有偏颇之处，这是可以理解的。毕竟，理论与实际的关系，涉及到很深入的哲学问题，恐怕至今也很难完全说明清楚，而且，在实际认识上就是到现在仍还有颇不一致的地方，至于个人的好恶与爱憎更可能千差万别。现在看来，现代数学的发展是在外部驱动与内部驱动的联合作用下进行的，即使是应用数学，也应是一个多角度、多层次的庞大的思想体系，难以用一个固定的模式来限定其发展方式和途径，但自觉保持与丰富多彩的外部世界的紧密联系，注意汲取能够原创性地推进数学发展的外部动力，无疑值得广大应用数学工作者认真关注。李国平先生坚信实践出真知，坚信结合实际、面向应用是推动数学发展的一条康庄大道，一直不遗余力地大力提倡。更可贵的是，李国平先生是真正理论联系实际的，他不仅是言者，而且是行者。他以身作则，身体力行，长期坚持深入生产第一线及其它科学技术领域，认真实

践自己发展数学的理念，努力将自己的理想变为现实。他在数学物理与系统科学方面的很多成果，就是在这种情况下逐步取得的。近年来，我国数学界正在大力提倡问题驱动的应用数学，并将其视为大力发展我国应用数学的一个关键性的举措。说在这方面，李国平先生已经我们做出了光辉的典范，他的坚定和执着感人至深，他的经验与教训更值得我们认真借鉴。在纪念李国平先生诞辰 100 周年的时候，我们要深入开展问题驱动的应用数学研究，努力将李国平先生未竟的理想付诸实现并发扬光大。

深切怀念李国平老师

中国数学与系统科学研究院　丁夏畦院士

今天我们隆重集会，纪念我们敬爱的老师李国平教授百年华诞，意义重大。李国平教授对我国数学事业，特别是中南地区数学事业的发展作出了卓越的贡献。他长期担任武汉大学数学系教授，创办了三个数学研究所，即武汉大学数学研究所、中科院数学计算技术研究所、中科院武汉数学物理研究所, 创办了两个数学期刊，即《数学杂志》和《数学物理学报》，是我国函数论、微分方程解析理论、数学物理和系统科学等学科的开拓者、奠基者和领导人，为国家培养了大批杰出的数学家。

李老师是我的恩师，是我进入高等数学学习的启蒙老师。一九四六年我考入武汉大学数学系，一进学校一年级，李老师就给我们开一门基础课，叫数学概论，实际上就是极限论。从 Peano 公理讲起，包括自然数、整数、有理数、实数（Dedekind 分割）列极限和函数极限等等，为时一年。李老师当时是武大数学系最著名的教授，一般名教授是不教一年级的课程的，但李老师特别，他听说我们班入学成绩不错，下决心从我们的基础抓起，从而奠定了我们学习高等数学必需的基础。除了教给我们数学知识之外，还教我们怎么读书。有两点我记忆特别深刻，第一点，他说“读数学书，首先要猛火煮，然后要慢火炆”。这与华罗庚先生“读数学书要由薄到厚，然后由厚到薄”有异曲同工之妙，都可以写入数学教育的教科书中。其次他说新学一门数学基础书，除了读正文内容外还要把所有习题不管难易通做一遍。这两点对我后来的学习和研究都是很有影响。

我们今天纪念李老师，就是要继承他的遗志，发扬他开创的光辉事业。我作为武汉大学毕业的学生，衷心祝愿武大数学系越办越好，作为武汉数学物理研究所前所长，也衷心祝愿中科院武汉物理与数学研究所越办越好。怎么叫办好？无论是大学还是研究

所，唯一标志就是出高水平人才，出高水平成果。记得蒋梦麟先生曾说："所谓大学者，非大楼之谓也，乃大师之谓也。"所以我们要精心培养出优秀的数学大师。此外还要办好《数学杂志》和《数学物理学报》，这是我们培养数学人才的基地，我们要把它们办成国内外一流。做好这两点，就使我们武汉地区数学能雄立于国内外学术之林，这将是我们对国家最大的贡献，也是我们对李老师最好的纪念。

深切怀念李国平老师

中国数学与系统科学研究院　王梓坤院士

1948 年，我有幸考进武汉大学。入学不久，就听说武大数学系有两位著名的教授，一位是李国平，一位是李华宗。可惜我没有机会见到李华宗先生。

那时正值解放前夕，学生活动很多，但还能上课。1949 年以后，政治运动接连不断：欢迎解放军进城；镇压反革命；拒用银元；下乡宣传爱国公约和土改；三反五反；抗美援朝参军；思想改造等等。同学们政治热情高涨，业务学习很不安心，形式上每学期只上二三门课。张延昌、吴亲仁先生教微积分，张远达、曾宪昌先生教高等代数，路见可先生教点集拓扑学与常微分方程，曾昭安、余家容先生教函数论，叶志先生教微分几何。老师们教得都非常认真，可惜学生心不在焉，大部分时间都用在政治运动上。直到四年级快毕业了，系领导发现我们的业务基础太差，才请出李国平先生给我们补教数学分析基础，从实验系的 Dedekind 分割讲起。这样，才有了聆听李先生讲课的机会。

李先生讲课高瞻远瞩，深刻透彻，特别是对内容的各部分、各章节、各定理间的关系，指点得非常清楚，使我们大开眼见、融会贯通。那时班上同学很少，不过十几人，如齐民友、吴厚心、张正言、欧阳绵等。课余同学们出于敬仰和好奇，常到李先生家里去拜望。他拿出许多张象地图那么大的图纸，上面标了各种颜色的箭头和弧线，以标明各定理间的联系。虽然不能细看，却教给了我们思考和学习的方法。李先生也鼓励我们自学，自己找参考书看，以培养独立工作能力。李先生的言传身教，对我们日后的科研和教学都起了非常大的作用。

遗憾的是，1952 年，我们就毕业了，我离开了武大，再也没有机会聆听李先生的教

诲。

1990 年，我申请中国科学院学部委员（院士），需要两名学部委员推荐。李先生说他非常乐意推荐，并愿留下一个推荐名额给我直到最后。可惜我再也找不到第二位推荐人，只好另请学校推荐。通过这件事，可见李先生对后辈的关心和提携于万一。

离开母校和李先生几近 60 年，许多事情已经淡忘，但李国平老师亲切待人的态度、严谨治学的精神、高尚的品格、学识的广博精深，以及对数学和社会进步的巨大贡献，将永远铭记在我们心中。

忆敬爱的导师李国平院士

武汉科技大学　任德麟

我是 1953 年考进武汉大学数学系的，1956 年暑假以后进入大学四年级。我和另外八个同学选修了李国平老师为毕业班同学开设的专门化课程并由李老师指导毕业论文。课程名称为" 整函数与半纯函数"，教材就是李老师的名著《半纯函数的聚值线理论》。当时未正式出版，用的是油印讲义。

李老师讲课不拘于公式推导等证明细节，而是将重点放在讲问题的起源、解决问题的思路，以及整个学科的来龙去脉，源流正变及发展趋势，思路清晰极富启发性。李老师讲课时全神贯注充满激情，具有很强的感染力。除了课堂讲学外，李老师非常重视学生的课后自学。关于自学的内容他一般不给我们预设过窄的范围，你读什么书，读什么文章，或则对哪一个数学分支感兴趣，李老师不仅不加以限制，而且给予鼓励和指导，有时还主动推荐相关读物供你进一步研习。李老师对我们的自学有非常严格的要求，规定每周要向他汇报，包括学习内容、心得体会、存在问题等。如果没有认真阅读和思考，这个" 汇报关" 是过不去的。多余如何做研究在大四之前我们十一无所知的，李老师在这方面给予我们很多具体的指导。李老师要求我们经常查 MR[1]并做内容摘要的卡片，从中了解前人已经做了哪些工作，解决了什么问题或解决到什么程度，还有什么问题有待研究。李老师把这项工作成为情报工作。李老师要求我们在总结前人工作的基础上大胆提出有意义的新课题，深入研读处于前沿的论文。李老师反复强调，这样做就一定就可以做出好的工作。

这里还想提一下印象最深的两件事。其一，在李老师家中曾经见过两厚本手抄论

[1] “美国数学评论”

文。据李老师介绍，这是他在日本进修时抄录的，因为旧中国研读资料奇缺，所以不得不用这种笨方法把有价值的论文抄下来，供日后回国做研究时参考。这样做需要何等的毅力！实在令人震撼！其二，李老师曾经借一本英文原版书给我读，在读的过程中看到李老师所加的许多批注，包括补足某些推导，某些改进，以及这样一些批语，如“此结论可进一步推广”，“此题可作为博士学位论文选题”等等。这是我顿悟：原来读书应该这样去读！

虽然毕业以后我没有继续学习函数论，但这一年跟随李老师的学习对我后来的学习和工作有很大的帮助。特别是李老师所教导的读书的方法、做研究工作的方法，使我终身受益。

敬忆李国平先生

武汉大学　余家荣

我是上世纪 40 年代初在重庆中央大学数学系就读时开始听到李国平先生的大名的。1947 年后在法国留学期间，了解到李先生早期对函数论的贡献。1951 年回国后在武汉大学数学系工作，有幸与李先生同事半个世纪，深受教益。

李先生积极、热情、爱党、爱国，一心想为我国数学及科技的腾飞尽力，他留下了丰富的科研成果，培养了一大批优秀人才，建立了数理研究所，创办了数学杂志，对我国科技及国防建设做出了重要贡献。

李先生虽然从基础数学研究开始他的终身事业，但始终倡导理论联系实际，身体力行。上世纪 50 年代计算机科学开始发展，李先生当时建立的研究所，不但研究基础及应用数学，也开始研究计算机科学；李先生本人也具体参加了有关部门的创建。现在的科学院物理数学研究所及 709 所，都是从李先生在上世纪 50 年代所建立的研究所逐步衍生的。连同李先生所创办的《数学物理学报》及《数学杂志》，数十年来，促进了我国数学与科技的发展。

今年恭逢李先生 100 岁诞辰，追忆畴昔，后来者应当把李先生所从事的事业发扬光大，为祖国腾飞尽力，以告慰先生在天之灵。

本科生能力提高项目优秀论文选编

一类椭圆微分方程最优控制问题解的存在唯一性

张灿, 张艳琼, 张静

1. 问题的提出

设 $a_0(.), a_{jk}(.) \in C^1(\Omega)$, 其中 Ω 为 R^n 中的非空开集，满足如下条件：

$$a_0(x) \geq \alpha > 0, \qquad \forall x \in \Omega$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq \alpha(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2) \qquad \forall x \in \Omega, \xi \in R^n$$

考察椭圆型微分方程:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{jk}(x)\frac{\partial y(x)}{\partial x_k}) + a_o(x)y(x) = f(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

$$y(x) = 0, x \in \partial\Omega$$

其中,$f(x) \in L^2(\Omega)$.

在下文中，我们首先定义上述方程解的定义。

现在，设 $\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{H}$ 为 Hilbert 空间， $B \in L(\mathbb{U}, \mathbb{V}'), C \in L(\mathbb{V}, \mathbb{H})$, 又设 $Z_d \in \mathbb{H}$ 给定，$N \in L(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ 是自共轭的，并且存在常数 $\gamma > 0$, 使得

$$< Nv, v > \qquad \geq \gamma||v||^2 \qquad \forall v \in \mathbb{U}$$

此时，提出我们将要研究的最优控制问题（P_1）

考察椭圆型微分控制系统：

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{jk}(x)\frac{\partial y(x)}{\partial x_k}) + a_0(x)y(x) = f(x) + Bv \qquad \forall x \in \Omega$$

$$y(x) = 0, x \in \partial\Omega$$

其中， $f(x) \in L^2(\Omega), v \in \mathcal{U}_{ad}, \mathcal{U}_{ad}$ 为 $\mathbb{U}$ 中的凸闭集， $\mathcal{U}_{ad}$ 为容许控制集。

考察性能指标

$$J(v) = ||Cy(v) - Z_d||^2 + < Nv, v >$$

其中 $y(v)$ 记作控制系统对应于控制函数 $v \in \mathcal{U}_{ad}$ 的解。

现在，最优控制问题为，选择控制作用 $u \in \mathcal{U}_{ad}$, 使得

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) \tag{P_1}$$

满足上述条件的控制 u 称作最优控制。

这就是本文将要研究的最优控制问题，我们主要研究该问题的最优控制的存在性。全文安排如下，下一节先介绍泛函分析与偏微分方程中的一些基本定义与定理，最后证明该问题最优控制的存在唯一性。

2. 预备知识

1.Hilbert 空间上二次泛函的极值问题

设 H 为 Hilbert 空间，即它是一个线性空间，并且对于 H 中的一对元素 x 和 y, 存在实数 $< x, y >$ 与之对应，其中 $<, >$ 为 H 的内积.

若 U 是 H 中的凸闭集，即对于 x_1 , $x_2 \in$ U, $\alpha \in [0, 1]$, 成立着

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in U$$

并且，如果 $x_k \in U, \lim_{k\to\infty} x_k = x$ 则 $x \in U$ 。

设 $\pi.H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ 具有如下的性质

1) 对称性：$\pi(x,y)=\pi(y,x)$;

2) 线性性：$\pi(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y)=\alpha_1\pi(x_1,y)+\alpha_2\pi(x_2,y)$;

3) 连续性：$\exists M>0, s.t., |\pi(x,y)|\leq M||x||||y||$;

4) 强限制性：$\exists c>0, s.t., \pi(x,x)\geq c||x||^2$;

具有上述性质的 π 称为对称双线性泛函，并且它为连续的和强限制性的。

连续线性泛函 $L.H\longrightarrow\mathbb{R}$ 具有性质

$$L(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1 L(x_1)+\alpha_2 L(x_2)$$

$$|L(x)|\leq M_1||x||$$

其中，α_1,$\alpha_2$$\in$$\mathbb{R}$,$x$,$x_1$,$x_2$$\in$H, 常数 $M_1>0$。

下面将在 U 上讨论 $J(x)=\pi(x,x)-2L(x)$ 的极小值问题，即

$$\inf_{x\in U} J(x) \tag{P_2}$$

称作二次泛函的极小值问题。

2.Sobolev 空间

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，它的边界 Γ 是（n-1）维的光滑流形。如果 $\varphi.\Omega\to R$ 是无穷次可微的，它的支集为 $x\in\Omega|\varphi(x)\neq 0$ 的闭包。Ω 上的无穷次可微函数的全体，记为 $D(\Omega)$, 在通常的加法与数乘的意义下，它为线性空间。

$D(\Omega)$ 上的连续线性泛函的全体记为它的对偶空间，记作 $D'(\Omega)$。容易知道

$$L^2(\Omega)\subset D'(\Omega)$$

对于 $f\in D'(\Omega), <f,.>.D(\Omega)\to R$ 为连续线性泛函。由于当 $\varphi\in D(\Omega)$ 时,$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\in D(\Omega)$, 从而 $-<f,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}>$ 决定了一个连续线性泛函，记它为 $<\frac{\partial f}{\partial x_j},\varphi>$, 称 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 为 f 关于 x_j 的广义导数。

如果 $f\in D'(\Omega)$ 有直到 m 阶平方可积的广义导数，就称 $f\in H^m(\Omega)$，并且记 f 的范数为

$$||f||_m^2=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leq m}|D^\alpha f|^2dx$$

其中

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$D^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

可以证明，在上述范数意义下， $H^m(\Omega)$ 为完备的内积空间，并且内积为

$$<f,g>=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le m}(D^\alpha f)(D^\alpha g)dx$$

称 $H^m(\Omega)$ 为 Sobolev 空间。

3.Dirichlet 问题的解

令

$$H_0^1(\Omega)=\{f|\quad f|_\Gamma=0,f\in H^1(\Omega)\}$$

对于椭圆方程，如果 $y(.)\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega\{\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x)\frac{\partial y(x)}{\partial x_k}\frac{\partial h(x)}{\partial x_j}+a_0(x)y(x)h(x)\}dx=\int_\Omega f(x)h(x)dx$$

$$\forall h(.)\in H_0^1(\Omega)$$

则称 $y(x)\in H_0^1(\Omega)$ 为（3）（4）的广义解或弱解，并且在此弱解的意义下，该椭圆方程的 Dirichlet 问题解存在并唯一，记作 $y(f)$, 表示依赖于 f, 而且还是线性的依赖关系。

3. 主要定理

定理 1:

最优控制问题（P_1）存在唯一的最优控制 $u(.)\in\mathcal{U}_{ad}$ 满足

$$J(u)=\inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}}J(v)$$

在证明定理 1 之前，我们先给出二次泛函极值问题解的存在唯一性定理，即如下的引理 1。

引理 1：

设 U 是 Hilbert 空间 H 上的凸闭集，π 是 H 上强限制，正定的连续对称双线性泛函，L 是 H 上的连续线性泛函，则极小化问题（P_2）存在唯一的解，即 $\exists \dagger x_0 \in U$ 使得，

$$J(x_0) = \inf_{x \in U} f(x)$$

证明：

因为

$$J(x) \geq c||x||^2 - M_1||x|| = ||x||(c||x|| - M_1)$$

又因为 $x \in$ U 为有界集，从而知道，

$$\alpha = \inf_{x \in U} J(x) \geq \inf_{x \in U}(||x||(c||x|| - M_1))$$

设 $\{x_k\}$ 是问题 (P_2) 的极小化序列，即

$$x \in U, \lim_{k \to \infty} J(x_k) = \alpha$$

由于 π 的双线性性和 L 的连续性，成立着如下平行四边形法则，即

$$J(\frac{x_k + x_l}{2}) + \pi(\frac{x_k - x_l}{2}, \frac{x_k - x_l}{2}) = \frac{1}{2}\{J(x_k) + J(x_l)\}$$

因此

$$\frac{c}{4}||x_k - x_l||^2 \leq \frac{1}{2}(J(x_k) + J(x_l)) - J(\frac{x_k + x_l}{2})$$

由于 U 的凸性知，$\frac{x_k+x_l}{2} \in U$，所以

$$J(\frac{x_k + x_l}{2}) \geq \alpha$$

故

$$0 \le \frac{c}{4}||x_k - x_l||^2 \le \frac{1}{2}(J(x_k) + J(x_l)) - \alpha$$

当 $k, l \to \infty$ 时，上式右端趋于 0，所以 $\{x_k\}$ 是 Cauchy 列，再有 H 完备性以及 U 的闭性知，

$$\exists x_0 \in U, s.t. \lim_{k\to\infty} x_k = x_o$$

又因为，

$$|J(x_k) - J(x_0)| \le |\pi(x_{k,k}) - \pi(x_{0,0})| + 2|L(x_k - x_0)|$$

$$\le |\pi(x_{k,k}) - \pi(x_{k,0}) + \pi(x_{k,0}) - \pi(x_{0,0})| + 2M_1||x_k - x_0||$$

$$\le \{M||x_k|| + ||x_0|| + 2M_1\}(||x_k||||x_0||)$$

因此

$$J(x_0) = \lim_{k\to\infty} x_k = \alpha = \inf_{x\in U} J(x)$$

即证明了极小化问题的存在性，下面再证明唯一性.

如果 $\overline{x} \in U$ 也满足 $J(\bar{x}) = \alpha$, 由平行四边形法则知

$$J(\frac{x_0 + \bar{x}}{2}) + \pi(\frac{x_0 - \bar{x}}{2}, \frac{x_0 - \bar{x}}{2}) = \frac{1}{2}(J(x_0) + J(\bar{x})) = \alpha$$

有上式可知

$$x_0 = \bar{x}$$

即证明了唯一性，故引理 1 得到证明.

现在来证明定理 1：

首先根据性能指标 $J(v)$ 的定义，得到：

$$J(v) =< C(y(v) - y(0)), C(y(v) - y(0)) >_H +$$

$$< Nv, v >_{\mathcal{U}} -2 < Z_d - Cy(0), C(y(v) - y(0)) >_H +||Z_d - Cy(0)||_H^2$$

因为

$$\pi(u, v) =< C(y(u) - y(0)), C(y(v) - y(0)) >_H + < Nu, v >_{\mathcal{U}}$$

为 U 上的双连续线性泛函，并且是强限制的，即

$$\pi(v,v) \geq \gamma ||v||_{\mathcal{U}}^2$$

又因为

$$L(v) =< Z_d - Cy(0), C(y(v) - y(0)) >_H$$

是 $\mathcal{U}$ 上的连续线性泛函，有引理 1 知，极小化问题

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) = \pi(u,v) - 2L(v) + ||Z_d - Cy(0)||_H^2$$

存在唯一的极值元 $u \in \mathcal{U}_{ad}$，使得

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

因此定理 1 得到证明.

结束语与致谢

本文仅仅证明了最优控制问题（P_1）的存在唯一性，没能给出最优控制的具体表示，或者它满足的关系式。在控制论中，有一类著名的关于最优控制的必要条件，常常被称作 Pontryagin 最大值原理，它在某种意义上包含了最优控制的一些信息，但是这个问题有待进一步的研究。

这是我们三人组成的学习小组一次学习经历，它是一篇读书笔记，其中绝大部分的结果都是已有的结果。但是，我们从这个学习的过程中获益很多，提高了自身的学习能力！在此感谢学院给我们提供的良好的学习环境。

参考文献

[1] 张学铭，李训经，张祖浩；最优控制系统微分方程理论，北京：高等教育出版社，1989。

[2] 齐民友：广义函数与数学物理方程，北京：高等教育出版社，2006。

[3] 张恭庆，林源渠：泛函分析（上册），北京：北京大学出版社，2008。

区域经济发展比较优势的数理分析

作者名称: 区域经济科研小组

学生姓名： 龙刚，陈凤平，刘旖旎，
梁德阳，江瑞奇，杨升，刘挺

指导老师：蔡东汉教授 羿旭明教授

2009 年 5 月

摘要: 本文从区域经济的已有理论出发，结合所分析的两个地区的特点，对劳动力，资本，政府政策三个方面进行分析。通过建立成本一定利润最大化模型及其对偶模型，即利润一定成本最小模型结合 *Lagrange* 函数优化方法求出模型的解，并对其进行了经济学解释，得出当两个地区的资本价格相同时，厂商的生产规模大小以及边际规模效应对两地的比较优势没有显著影响的结论，为厂商在选址时不需要考虑上述因素提供了理论依据。同时，本文还讨论了资本额，劳动力，政府税率因素的变化对比较优势的影响，发现在不同的规模条件下，劳动力因素与运输成本的因素的占主要影响范围。

关键词: 比较优势 规模效应 政府

1. 理论背景

根据韦伯工业区位理论，影响所有工业的一般区位因子最终被确定为运费和劳动力成本两种。考虑当代交通业的发达，运费指向作用较弱，劳动力成本指向占据更重要的地位。影响利润收入主要考虑以下五个因素：即劳动力成本指数和劳动力系数、环境条件、技术进步、政府政策、资本要素。本文可以主要集中在对劳动力成本，政府政策，资本可得性上进行分析。

2. 数理模型

本文先从劳动力、资本、运输成本、政府政策四个方面来对产品转移问题加以分析，建立比较静态分析模型。

2.1 模型假设

①设 A、B 两地区生产同一种产品 X。

②投入的生产要素有劳动力，资本。

③ A、B 两地区生产技术相同。由于本文所考虑的是技术要求低的劳动密集型产业，因此不存在技术的差异。

④市场是完全竞争的，不考虑需求和交易费用。因为本文分析的是厂家众多的服装，五金等行业，而且针对的是没有品牌的一般中小企业，它们的产品基本没有区别。同时，由于分析的厂家的产品主要是卖给广大农民和城市低收入人群，所以需求总体比较大，交易费用也比较低。因此，为了能较好的把握问题的本质，本文在此不考虑交易费用和市场需求。

⑤生产要素可以自由流动，但两地的生产要素价格不一致。根据目前的实际情况，各地的生活水平还是有很大的差异。同时人口和资本流动基本没有限制。

⑥生产函数

$$f(K.L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \alpha, \beta > 0$$

2.2 理论分析

基于以上假设，只需对 A、B 两地的生产成本加以分析，便可看出产业转移方向，因为 A、B 两地收益相同（产品价格相同，两者产量相同）。

总成本：

$$TC = rK + wL + \delta Q + tQ(1-\delta) \qquad 0 \leq \delta < 1$$

其中， r 为资本价格，也即利率， w 为劳动力价格，也即工资。 δQ 为运输成本。 Q 为总产量， δ 为运输成本与总产量对应的总价值的比值。 t 为税率， y 为总收入， K 为资本， L 为劳动力。 $Y = pQ$， p 为商品价格（为方便处理，令 $p = 1$）。

此处，政府政策主要对 r, w, t 三个参数产生影响。

下面分别讨论成本既定的情况下，实现产出最大和产出的情况下，实现成本最小，也就是求两个优化问题的解：

$$\max Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$
$$s.t.TC = rK + wL + \delta Q + (1-\delta)tQ = C$$

其中 C 为常数。

构造 Lagrange 函数

$$P(K, L, \lambda) = AK^{\alpha}L^{\beta} - \lambda[rK + wL + (\delta + t - \delta t)AK^{\alpha}L^{\beta} - C]$$

对上式分别关于 K, L,λ 求偏导数，并令其为零，即

由此得出：

$$\frac{rK}{wL} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α, β 与技术水平有关，短期来说是不变的。

就短期而言，厂商在成本既定情况下最优生产投入应该满足 $\frac{rK}{wL} = \frac{\alpha}{\beta}$, 而对于短期来讲， K 是不变的，r 也不是厂商可以控制的，（至少在我国，厂商尤其是中小厂商很难在融资方面有话语权）从而短期来讲，厂商要想达到最优生产投入，只能从劳动人数和劳动者工资水平角度进行调整。由于考虑的是劳动密集型企业， β 的比例比较大，在短期 K 不变的情况下，要想达到利润最大化，只有增大 L 的投入，由 $\frac{\alpha}{\beta}$ 为常数，故只有压低 w（即劳动力价格），这与市场上的现象是一致的。另一方面，从长期考虑，当技术发展之后，或者说劳动力素质提高后，由 α 不变， β 变大， r, L, K 不变，故 w 增大，即劳动者的工资水平也会相应提高。

现在来考虑，产量一定的情况下成本最小的优化问题。

$$\min TC = rK + wL + \delta Q + (1-\delta)tQ$$
$$s.t.Q = AK^{\alpha}L^{\beta} = Q_0$$

其中 Q_0 为常数。

构造 Lagrange 函数

$$P(K,L,\mu)=TC-\mu(AK^{\alpha}L^{\beta}-Q_0)$$

分别对 K,L,μ 求偏导数，并令其为零，即

由此得出

$$\frac{rK}{wL}=\frac{\alpha}{\beta}$$

从上述结果可知道在规模一定的情况下，厂商的最优生产投入同样应该满足 $\frac{rK}{wL}=\frac{\alpha}{\beta}$。这从一个侧面解释了下述经济现象，即在技术水平相对较低时，厂商的劳动成本核算较大，而在技术水平发展后，厂商需要的劳动成本核算刚不断减少，同时还说明厂商愿意为较高技能劳动者支付较高工资而不影响整个企业的成本和产出。综合上面两种情况求出的结果，可得到如下一些启示，当厂商在做融资决策时，可以通过上述比例来确定什么样的 r 水平可以接受。同时在管理方面，也可以参考上述比例式员工的工资水平和人数。最后，讨论一下规模对选址的影响。

$$TC=rK+wL+\delta Q+(1-\delta)tQ$$

已知 $\frac{rK}{wL}=\frac{\alpha}{\beta}$

$$TC=rK+\frac{\beta}{\alpha}rK+\delta AK^{\alpha}(\frac{\beta r}{\alpha w}K)^{\beta}+(1-\vartheta)tAK^{\alpha}(\frac{\beta r}{\alpha w}K)^{\beta}$$

$$=rK+\frac{\beta r}{\alpha}K+\delta A(\frac{\beta r}{\alpha w})^{\beta}gK^{\alpha+\beta}+(1-\delta)tAK^{\alpha}(\frac{\beta r}{\alpha w}K)^{\beta}$$

$$=rK+\frac{\beta r}{\alpha}K+[tA(1-\delta)+\delta A](\frac{\beta r}{\alpha w})^{\beta}K^{\alpha+\beta}$$

由于甲、乙两地区的 r,w,t 的不同，从上述表达式可以看出，当

$$r_1K+\frac{\beta r_1}{\alpha}K+(\frac{\beta r_1}{\alpha w_1})^{\beta}[\delta_1A+(1-\delta_1)t_1A]K^{\alpha+\beta}>r_2K+\frac{\beta}{\alpha}r_2K+t_2AK^{\alpha+\beta}(\frac{\beta r_2}{\alpha w_2})^{\beta}$$

（由于乙地区无运输成本）时，则应选择乙地区

当

$$r_1K+\frac{\beta r_1}{\alpha}K+(\frac{\beta r_1}{\alpha w_1})^\beta[\delta_1A+(1-\delta_1)t_1A]K^{\alpha+\beta}<r_2K+\frac{\beta}{\alpha}r_2K+t_2AK^{\alpha+\beta}(\frac{\beta r_2}{\alpha w_2})^\beta$$

（由于乙地区无运输成本）时，则应该选择甲地区

而当二者相等时，则无论哪个地区都一样。

下面考虑规模效应，即 $\alpha+\beta$ 取值不一定为 1，此时，可以利用上述表达式确定 K 值，进而可以确定生产规模 Q

此时

$$Q=AK^\alpha(\frac{\beta r}{\alpha w}K)^\beta=(\frac{\beta r}{\alpha w})^\beta AK^{\alpha+\beta}$$

3. 结论

当 r_1=r_2=r 时，

$$TC_1-TC_2=r_1K+\frac{\beta r_1}{\alpha}K+(\frac{\beta r_1}{\alpha w_1})^\beta[\delta_1A+(1-\delta_1)t_1A]K^{\alpha+\beta}$$

$$-r_2K-\frac{\beta}{\alpha}r_2K-t_2AK^{\alpha+\beta}(\frac{\beta r_2}{\alpha w_2})^\beta$$

$$=(\frac{\beta r_1}{\alpha w_1})^\beta[\delta_1A+(1-\delta_1)t_1A]K^{\alpha+\beta}-t_2AK^{\alpha+\beta}(\frac{\beta r_2}{\alpha w_2})^\beta$$

$$=(\frac{\beta r}{\alpha})^\beta[\frac{\delta_1A+(1-\delta_1)t_1A}{w_1^\beta}-\frac{t_2A}{w_2^\beta}]K^{\alpha+\beta}$$

其取值的正负与 $\alpha+\beta$ 的取值无关，同时与 K 和 r 亦无关。

由此得出结论：当甲、乙两地的利率相等时，两地的比较优势与厂家的规模和生产的规模效应无关。

4. 其他因素对比较优势的影响

由

$$TC_1-TC_2=r_1K+\frac{\beta r_1}{\alpha}K+(\frac{\beta r_1}{\alpha w_1})^\beta[\delta_1A+(1-\delta_1)t_1A]K^{\alpha+\beta}$$

$$-r_2K-\frac{\beta}{\alpha}r_2K-t_2AK^{\alpha+\beta}(\frac{\beta r_2}{\alpha w_2})^{\beta}(\delta_2=0)$$

整理得:

$$TC_1-TC_2=(r_1-r_2)(1+\frac{\beta}{\alpha})K-A[(\frac{\beta r_2}{\alpha w_2})^{\beta}t_2-(\frac{\beta r_1}{\alpha w_1})^{\beta}(\delta_1+t_1-\delta_1t_1)]K^{\alpha+\beta}$$

由上述表达式可以看出，当 K 取值越大，则运输成本的影响也越大。另一方面，从表达式可以看出，税收的影响是很明显的。

当 r_1=r_2=r 时，很明显可以看出，两地的成本差与 K，也即规模有很大关系，当 K 变化时，比较优势的大小是 K 的幂函数。

当 $r_1\neq r_2$ 时，比较优势的大小依然与厂家的规模大小有关，只是此时的关系比较复杂。

另一方面，当规模不变等其他变量不变时，来看税收的影响。此时，可以看到两地的税收与本地的比较优势的大小是负相关的，但其相关系数与技术水平、边际产出、劳动力价格、利率水平及运输成本都有关系。因此，一方面，政府在制定税收政策时要充分结合本地的实际来估计政策效应的大小，而不能看到别的地方有好的效应就盲目跟风。另一方面，结合分析的行业的特点和假设，技术水平、边际产出各地都差不多，利率水平也相差不大。因此在分析本地区的特点时，主要是看劳动力成本和运输成本。

参考文献

[1] 王世军，综合比较优势理论与实证研究，中国期刊全文数据库，2007 年 8 月 2 号

[2] 罗璞，李斌，再论比较优势、绝对优势与 DFS 模型，当代经济科学，2004 年第 06 期

[3] 朱玉泉，服务业国际转移的产业差异和区位差异研究，东南大学硕士学位论文，中国期刊全文数据库，2006 年

[4] 李凡，邓家禔，需求产品成本分析方法，北京航空航天大学学报，2004 年 01 月，第 30 卷第 01 期

[5] 刘青，外商直接投资区域选择影响因素的实证研究，《商场现代化》，2008 年 05 月（上旬刊）总第 538 期

单位根过程的渐近性质

王绍臣 李晨

摘要： 本文主要研究误差为 $MA(\infty)$ 的单位根过程的渐近性质和相关统计量的渐近分布，并对一般单位根过程做了有益的推广，并在一定的假设下得到了单位根过程的阶的估计。

关键词： 布朗运动；单位根；鞅；$Hàjek$-$Sidak$ 定理；

1. 引言

考虑时间序列 $\{x_t, t \in \mathbb{T}\}$ 具有形式

$$x_t = x_{t-1} + u_t \tag{1}$$

其中 $u_t = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}, \varepsilon_t \sim iid(0,1)$ 且 c_j 满足 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |j|^{\frac{1}{2}}|c_j| < \infty$. 为此定义 $\phi(B) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j B^j$，其中 B 为后移算子，那么 (1) 可以改写为 $(1-B)x_t = \phi(B)\varepsilon_t$ 若对任意的 $z \in \{x \in \mathbb{C}, |x| \leq 1\}$, 多项式 $\phi(z) \neq 0$, 那么 (1) 又可以写为 $\phi^{-1}(B)(1-B)x_t = \varepsilon_t$, 此时多项式 $\hat{\phi}(z) = \phi^{-1}(z)(1-z)$ 在单位圆周上有一个单位根，我们称具有形式 (1) 的过程为单位根过程。对于单位根过程我们感兴趣的是与均值方差等有关统计量的渐近性质。 $Phillips$ 在文章 [2] 中详细讨论了具有单位根为 $\rho_n = 1 + c/k_n, k_n \to \infty, k_n = o(n)$ 单位根过程的渐近性质。在本文第二节我们将讨论单位根的渐近性质，在第三节我们给出一些关于模型的推广。

2. 单位根的渐近性质

为了便于处理，我们把 (1) 改写为独立和的形式。为此定义 $\tilde{c}_j=\sum\limits_{k=j+1}^{\infty}c_k, \tilde{\phi}(B)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\tilde{c}_jB^j, \tilde{\varepsilon}_t=\tilde{\phi}(B)\varepsilon_t$

引理 2.1 在上面的记号下有，$\mathbb{E}\tilde{\varepsilon}_t=0, \mathrm{Var}\tilde{\varepsilon}_t<\infty$，且

$$x_n=\phi(1)\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t+\tilde{\varepsilon}_0-\tilde{\varepsilon}_n+x_0 \tag{2}$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}\phi(B)&=\sum_{j=0}^{\infty}c_jB^j=\sum_{j=0}^{\infty}c_j-\sum_{j=1}^{\infty}c_j+\left(\sum_{j=1}^{\infty}c_j-\sum_{j=2}^{\infty}c_j\right)B+\left(\sum_{j=2}^{\infty}c_j-\sum_{j=3}^{\infty}c_j\right)B^2+\cdots\\&=\sum_{j=0}^{\infty}c_j+(B-1)\sum_{j=1}^{\infty}c_j+(B^2-B)\sum_{j=2}^{\infty}c_j+\cdots=\phi(1)+(B-1)\tilde{\phi}(B)\end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned}x_n&=\sum_{t=1}^{n}u_t+x_0=\sum_{t=1}^{n}\phi(B)\varepsilon_t+x_0=\sum_{t=1}^{n}(\phi(1)+(B-1)\tilde{\phi}(B))\varepsilon_t+x_0\\&=\phi(1)\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t+\sum_{t=1}^{n}(B-1)\tilde{\phi}(B)\varepsilon_t+x_0=\phi(1)\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t+\sum_{t=1}^{n}(B-1)\tilde{\varepsilon}_t+x_0=(2)\end{aligned}$$

而 $\mathbb{E}\tilde{\varepsilon}_t=0$ 是明显的，由 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|j|^{\frac{1}{2}}|c_j|<\infty$ 知

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\tilde{\varepsilon}_t&=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{c}_j{}^2=\tilde{c}_0^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=j+1}^{\infty}c_k\right)^2\le\tilde{c}_0^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=j+1}^{\infty}k^{1/2}|c_k|\right)\left(\sum_{k=j+1}^{\infty}|c_k|/k^{1/2}\right)\\&\le\tilde{c}_0^2+\sum_{j=1}^{\infty}j^{1/2}|c_j|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j+1}^{\infty}|c_k|/k^{1/2}=\tilde{c}_0^2+\sum_{j=1}^{\infty}j^{1/2}|c_j|\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|k^{1/2}<\infty\qquad\square\end{aligned}$$

利用引理 (2.1), 我们在 $[0,1]$ 上定义随机过程

$$X_n(r)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[nr]}u_j+\frac{1}{\sqrt{n}}x_0=\frac{\phi(1)}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[nr]}\varepsilon_j+\frac{1}{\sqrt{n}}[\tilde{\varepsilon}_0-\tilde{\varepsilon}_{[nr]}]+\frac{1}{\sqrt{n}}x_0\quad\forall\ r\in[0,1]$$

定理 2.2 若假定 $\frac{1}{\sqrt{n}}x_0 \xrightarrow{p} 0$ 对上述定义的随机过程有

$$X_n(r) \to N(0, \phi(1)^2 r)$$

证明 首先注意到，对任意的 $\epsilon > 0$，由 *Chebyshev* 不等式

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}[\tilde{\varepsilon}_0 - \tilde{\varepsilon}_{[nr]}]\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{2(\mathrm{Var}\tilde{\varepsilon}_0 + \mathrm{Var}\tilde{\varepsilon}_{[nr]})}{n\epsilon^2} \to 0$$

再由假设和由中心极限定理

$$X_n(r) = \frac{\phi(1)}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[nr]}\varepsilon_j + o_p(1) = \phi(1)\frac{\sqrt{[nr]}}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{[nr]}}\sum_{j=1}^{[nr]}\varepsilon_j \to N(0, \phi(1)^2 r)$$

上面利用到当 $n \to \infty$ 时有 $\frac{\sqrt{[nr]}}{\sqrt{n}} \to \sqrt{r}$. □

推论 2.3 对 $0 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_n \leq 1$ 有

$$[X_n(r_1), X_n(r_2) - X_n(r_1), \cdots, X_n(r_n) - X_n(r_{n-1})] \xrightarrow{d} N(0, \phi(1)^2\Delta)$$

其中 $\Delta = diag(r_1, r_2 - r_1, \ldots, r_n - r_{n-1})$. 可见 $X_n(r)$ 的有限维分布与布朗运动相同，下面的引理解决了 $X_n(r)$ 的收敛性问题。

引理 2.4 对任意的 $\varepsilon, \eta > 0$, 存在一个 $\delta > 0$ 满足

$$P\left(\sup_{|r-s|<\delta}|X_n(r) - X_n(s)| > \varepsilon\right) < \eta \quad n \to \infty$$

证明 注意到 $\{X_n(t), \mathcal{F}_t\}$, 为一鞅列，其中 $\mathcal{F}_t = \sigma(X_n(s) : s \leq t)$. 故利用 *Doob* 鞅极大不等式，结论自明。 □

由上述引理可知

$$X_n(r) \xrightarrow{d} \phi(1)W(r) \tag{3}$$

其中 $W(r)$ 是标准布朗运动。

定理 2.5

$$\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{t=1}^{n} x_t \quad\to\quad \phi(1)\int_0^1 W(s)\,ds \tag{4}$$

$$\frac{1}{n^{2}}\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \quad\to\quad \phi^2(1)\int_0^1 W^2(s)\,ds \tag{5}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}u_t \quad\to\quad \frac{\phi^2(1)}{2}(W^2(1)-1)+\frac{1}{2}(\phi^2(1)-\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2) \tag{6}$$

证明 不妨设 $x_0=0$，我们先证第一式，为此记 $S_t=\sum_{j=1}^{t}u_j$, 则 $\sum_{t=1}^{n}x_t=\sum_{t=1}^{n}(S_{t-1}+u_t)$，注意到 $\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{t=1}^{n}u_t=\mathcal{O}_p(n^{-1/2})$ 且对 $\frac{t-1}{n}\le r<\frac{r}{n}$ 有 $X_n(r)=\frac{S_{[nr]}}{\sqrt{n}}+o_p(1)=\frac{S_{t-1}}{\sqrt{n}}+o_p(1)$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{t=1}^{n}x_t&=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{S_{t-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{t=1}^{n}u_t=\sum_{t=1}^{n}\int_{\frac{t-1}{n}}^{\frac{t}{n}}X_n(r)\,dr+o_p(1)\\&=\int_0^1 X_n(r)\,dr+o_p(1)\to\phi(1)\int_0^1 W(s)\,ds\end{aligned}$$

最后一个式子利用 (3) 和连续映射定理，这样就完成了证明。第二式的证明完全类似，以下证第三式：

注意到 $\sum_{t=1}^{n}\Delta S_t^2=\sum_{t=1}^{n}[(S_{t-1}+u_t)^2-S_{t-1}^2]=\sum_{t=1}^{n}u_t^2+2\sum_{t=1}^{n}u_tS_{t-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_{t-1}u_t&=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}S_{t-1}u_t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Delta S_t^2-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}u_t^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}S_n^2-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}u_t^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}u_t^2\right]\xrightarrow{d}\frac{1}{2}(\phi^2(1)W^2(1)-\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2)\\&=\frac{\phi^2(1)}{2}(W^2(1)-1)+\frac{1}{2}(\phi^2(1)-\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2)\qquad\square\end{aligned}$$

推论 2.6

$$\frac{1}{n^{3/2}}x_n\sum_{t=1}^{n}x_t\to\phi^2(1)W(1)\int_0^1 W(s)\,ds$$

3. 几点推广

本节主要对第二节中讨论的模型做了推广并给出一些基本结果。首先我们推广模型 (1) 为

$$x_t = c_1x_{t-1} + c_2x_{t-2} + \cdots + c_px_{t-p} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t \sim iid(0,\sigma^2) \tag{7}$$

满足多项式 $\phi(z) = 1 - c_1z - c_2z^2 - \cdots - c_pz^p$ 有单位根 1. 利用后移算子 B,(7) 可写为 $\phi(B)x_t = \varepsilon_t$. 设 $\phi(z) = (1-z)^\alpha\theta(z), \alpha \geq 0$ 且 $\theta(z) = 0$ 没有单位根，则

情形一： $\alpha = 1$, 此时比较简单，(7) 可写为 $(1-B)x_t = \theta^{-1}(B)\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim iid(0,\sigma^2)$ 这样就转化为已经讨论过的情形了。

情形二： $\alpha > 1$, 同样的，(7) 可写为 $(1-B)^\alpha x_t = \theta^{-1}(B)\varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim iid(0,\sigma^2)$ 此时定义 $(1-B)y_t = (1-B)^\alpha x_t$ 即可转化为已讨论情形，但是对 α 较大时，类似于定理 (2.5) 的结果形式一般比较复杂。例如 $\alpha = 2$ 我们有

定理 3.1 对模型 (7) 且 $\alpha = 2$ 时，我们有

$$\frac{1}{n^{3/2}}(x_n - x_0) \xrightarrow{d} \theta^{-1}(1)\int_0^1 W(s)\,ds$$

下面我对模型 (1) 再做一些推广，以此把以前的讨论的结果都归到此节的内容中。先考虑模型

$$x_t = \rho x_{t-1} + u_t, t = 1,\ldots,n; u_i \sim iid(0,\sigma^2) \tag{8}$$

有以下形式的定理成立

定理 3.2

a. 对模型 (3.2)，如果 $|\rho| < 1$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \to \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}, \quad \frac{1}{n^{1/2}}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}u_t \to N\left(0, \frac{\sigma^4}{1-\rho^2}\right), \quad \sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) \to N(0, 1-\sigma^2)$$

b. 对上述模型，如果 $|\rho| > 1, x_0 = 0$, 则

$$\frac{\rho^n}{\rho^2 - 1}(\hat{\rho}_n - \rho) \to C$$

其中 $\hat{\rho}_n$ 依前一章定义,C 为标准 $Cauchy$ 分布。

再考虑模型

$$x_t = \rho_n x_{t-1} + u_t, t = 1, \ldots, n;\ \rho_n = 1 + \frac{c}{k_n} \tag{9}$$

其中 $k_n \to \infty, k_n = o(n)$, 当 $n \to \infty$ 时且 $u_i \sim iid(0, \sigma^2)$.

我们注意到此时的模型并没有单位根而是具有渐近单位根，那么此时在第二节中讨论的那些统计量的渐近性质又将如何呢？ *Phillips* 等人在文章 [2] 中给出了一些结果。

定理 3.3

a. 对模型 (3.3), 如果 $c < 0$, 则有

$$\frac{1}{nk_n}\sum_{t=1}^{n} x_t^2 \to \frac{\sigma^2}{-2c},\quad \frac{1}{\sqrt{nk_n}}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}u_t \to N\left(0, \frac{\sigma^4}{-2c}\right),\quad \sqrt{nk_n}(\hat{\rho}_n - \rho) \to N(0, -2c)$$

b. 对模型 (3.3), 如果 $c < 0$, 则有

$$\left(\frac{1}{\rho_n^{-n}k_n}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}u_t, \frac{1}{\rho_n^{-2n}k_n^2}\sum_{t=1}^{n} x_{t-1}^2\right) \to (XY, Y^2),\qquad \frac{k_n\rho_n^n}{2c}(\hat{\rho}_n - \rho) \to C$$

其中 $X, Y \sim iid\ N(0, \sigma^2/2c)$,$C$ 为标准 *Cauchy* 分布。

事实上简单运算可知定理 (3.3) 包含定理 (3.2)，下面我们结合第二节的模型，再将模型推广如下

$$x_t = \rho_n x_{t-1} + u_t, u_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}, \rho_n = 1 + \frac{c}{k_n} \tag{10}$$

其中 c_j 满足 $\sum_{j=0}^{\infty} |j|^{1/2}|c_j| < \infty, \varepsilon_t \sim iid\ (0, \sigma^2)$. 若记 $\phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ 则

引理 3.4

$$u_t = \phi(1)\varepsilon_t + \tilde{\varepsilon}_{t-1} - \tilde{\varepsilon}_t,\qquad x_n = \sum_{j=0}^{n-1} u_{n-j}\rho_n^j + \rho_n^n x_0$$

其中 $\tilde{\varepsilon}_t$ 依前文定义。

证明 很明显，可看引理 (2.1) 的证明。 □

所以有

$$x_n = \phi(1)\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon_{n-j}\rho_n^j + \sum_{j=0}^{n-1}(\tilde{\varepsilon}_{n-j-1} - \tilde{\varepsilon}_{n-j})\rho_n^j + \rho_n^n x_0$$

引理 3.5 对 $\forall c\in\mathbb{R}$ 且假定 $k_n=o(n)$, 则对模型 (3.4) 有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\rho_n^i\varepsilon_t}{\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\rho_n^{2j}}}\xrightarrow{\mathcal{L}}N(0,1)$$

证明 注意到

$$\rho_n^n=\left(1+\frac{c}{k_n}\right)^n\sim\exp\left(\frac{cn}{k_n}\right)$$

故当 $k_n=o(n), c>0$ 时， $\rho_n^n\to\infty$; 当 $c<0$ 时， $\rho_n^n\to 0$. 再注意到，当 $c>0$ 时

$$\max_{1\le i\le n}\frac{\rho_n^{2i}}{\sum_{j=1}^{n}\rho_n^{2j}}=\frac{(1-\rho_n^2)\rho_n^{2n-2}}{(1-\rho_n^{2n})}\to 0$$

当 $c<0$ 时

$$\max_{1\le i\le n}\frac{\rho_n^{2i}}{\sum_{j=1}^{n}\rho_n^{2j}}=\frac{1-\rho_n^2}{(1-\rho_n^{2n})}\to 0$$

当 $c=0$ 时，结论显然。因此由 $H\grave{a}jek-Sidak$ 定理知结论成立。 □

注 3.6 当 $\frac{n}{k_n}\to 0$ 时，引理 (3.5) 仍然成立，证明方法类似。

引理 3.7 若 $k_n=o(n)$, 则对模型 (3.4) 有

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\rho_n^{2k}}}\sum_{j=0}^{n-1}(\tilde{\varepsilon}_{n-j-1}-\tilde{\varepsilon}_{n-j})\rho_n^j\xrightarrow{p}0$$

证明 当 $c>0$ 时

$$\frac{\sqrt{k_n}\rho_n^n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\rho_n^{2k}}}=\frac{\sqrt{k_n(1-\rho_n^2)}\rho_n^n}{\sqrt{\rho_n^2(1-\rho_n^{2n})}}\sim\sqrt{k_n(\rho_n^2-1)}\sim\sqrt{k_n\cdot\left(\frac{2c}{k_n}+o(\frac{1}{k_n})\right)}=\sqrt{2c+o(1)}$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\rho_n^{2k}}}\sum_{j=0}^{n-1}(\tilde{\varepsilon}_{n-j-1}-\tilde{\varepsilon}_{n-j})\rho_n^j=\frac{1}{\sqrt{k_n}}\sum_{j=0}^{n-1}(\tilde{\varepsilon}_{n-j-1}-\tilde{\varepsilon}_{n-j})\frac{\sqrt{k_n}\rho_n^j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\rho_n^{2k}}}$$

由引理 [2.1] 知最后一式左半部分收敛而右半部分有界，故上式趋于 0。同理可证 $c\le 0$ 的情形。 □

注 3.8 当 $\frac{n}{k_n} \to 0$ 时，上述引理仍然成立。

综合以上几个引理我们有

定理 3.9 若 $k_n = o(n), x_0 = o(\sqrt{k_n})$, 则对模型 (3.4) 有

$$\frac{x_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \rho_n^{2k}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2 \phi^2(1))$$

此式给出了 x_n 趋于无穷时的阶的估计，在文献 [2] 中 *Phillips* 还给出了单位根的一些其它性质，以及在文献 [6] 中分别给出了平稳、不平稳和爆炸模型单位根的大偏差原理。对于本章推广的模型，相关的结论尚无结果。

参考文献

[1] Patrick Billingsley,Convergence of Probability Measures [M] New York,John Wiley,1968.

[2] P.C.B.Phillips,Tassos Magdalions,Limit theory for moderate deviations from a unit root[J],Journal of Econometrics 136(2007)115-130.

[3] James.D.Hamilton,Time Series Analysis[M],Princeton University Press,1994

[4] P.C.B.Phillips. “Time series regression with a Unit Root.” [J] Econometrica:1987.277-301

[5] P.C.B.Phillips.Towards a unified asymptotic theorey for autoregression [J] Biometrika 1987.74,535-547

[6] Bernard Bercu ,On large deviations in the Gaussion autoregressive process : stable ,unstable and explosive cases [J],Bernoulli 7(2),2001,299-316

附 录

李国平简介 [1]

李国平，数学家。长期从事函数论研究，在整函数与半纯函数理论，解析函数逼近论，准解析函数理论等领域获众多成果。他积极倡导数学物理研究，并创办了专门杂志。

生平概况

李国平，幼名海清，字慕陶。1910 年 11 月 15 日生于广东省丰顺县沙田黄花村。其父善长裁缝手艺，前妻不幸早故；继室郑若川女士，生有五子二女。

李国平少时家贫，10 岁前读私塾，启蒙老师为丰顺著名学者李福田先生。11 岁时由伯父李介承带往广州，进当时的南海第一高小学习，后又考入中山大学附中的前身广东省高等师范附中。入学时成绩优异，唯数学仅 15 分而甚苦。初中二年级开始，得刘君罴先生授以自学之法，并赠《温德华氏小代数》书，勉其自励，精心指点，有所领悟，自此酷爱数学，逐步奠定了他毕生学业的基础。从 17 岁进高一到大学毕业的 7 年时间，他又为生计所迫，半工半读。

李国平 1933 年毕业于中山大学数学天文系。大学期间受到赵进义、刘俊贤两位著名教授的栽培。毕业后即受聘于广西大学数学系任讲师。1934 年至 1936 年东渡日本，在东京帝国大学读研究生，得到系主任竹内端三及辻正次教授的指导。在此期间，因文会友而与中国数学界的前辈熊庆来结为忘年交。1937 年经熊庆来提名推荐任中华教育文化基金会研究员，派赴法国巴黎大学庞加莱研究所工作。1939 年抗日战争初期，国

[1]本文摘自互动百科，原文网址：http://www.hudong.com/wiki/李国平

家民族处于危难之际，他毅然回国。其后他历任四川大学数学系教授，武汉大学数学系教授、系主任、副校长、校务委员会副主任、数学研究所所长，中国科学院数学计算技术研究所所长，中国科学院武汉数学物理研究所所长，国家科学技术委员会武汉计算机培训中心主任，湖北省科学技术协会副主席、顾问，国家科学技术委员会数学学科组成员，中国数学会理事，中国系统工程学会副理事长兼学术委员会主任，中国数学会名誉理事，湖北省暨武汉市数学会名誉理事长，中国科学院武汉数学物理研究所名誉所长，《数学物理学报》主编，《数学年刊》副主编，《数学杂志》及《系统工程与决策》名誉主编。1955 年当选为中国科学院学部委员。1956 年加入中国共产党。曾被选为全国先进工作者，是第四、第五、第六届全国人民代表大会代表。

函数论研究

李国平早在青年时期，就以函数论为其研究方向，自 1935 年起陆续发表了一批关于半（亚）纯函数方面的研究成果，受到著名函数论专家瓦利隆的注意，并逐篇加以评介，发表在德国《数学及其边缘学科文摘》上，前后有 6 篇之多。在整函数与半纯函数理论中，除奈望林纳的示性函数外，级与型是关键性的概念。1936 年，他剖析了布卢门塔尔关于函数型的理论，在奈望林纳、瓦利隆、米洛、劳赫等人工作的基础上，提出了半纯函数（有限级与无限级）的波莱尔方向与填充圆的统一理论，其中特别包括了他在 1935 年与熊庆来用不同方法同时建立的无限级半纯函数理论。熊庆来在《亚纯函数的几个方面的近代研究》一文中就曾经指出：“关于奈氏的学理……在中国方面亦先后有我自己及李国平、庄圻泰等的一些工作，其中关于无穷级的函数者尤较具体而显著。”瓦利隆在其《半纯函数的波莱尔方向》一书中也肯定了这一点。熊庆来在上文中还对李国平关于半纯函数理论研究中的另一贡献——辐角分布理论作了充分肯定。这一工作已收入李国平的专著中。他关于奈望林纳第二基本不等式中的重级指量 N1（r）的进一步探讨也是重要的。熊庆来在《十年来的中国科学（数学部分），1949—1959》的《亚纯函数论与解析函数正规族论》一文中就指出，李国平凭借他对上述奈望林纳基本不等式的强化，就填充圆与波莱尔方向，得出了较瓦利隆与米洛的定理更为精密的结果。在这篇关于中国数学发展历史的文献中，对李国平在唯一性问题、有理函数表示问题、整函数论在函数序列的封闭性问题上的应用、伴随外尔斯特拉斯函数及强伴随外

尔斯特拉斯函数等方面的研究作了评述。

解析函数

李国平还研究了解析函数逼近等问题。例如他利用布特鲁一嘉当定理获得了整函数的拉格朗日插值收敛性的一些结果、关于解析函数用费伯多项式逼近的一些结果等。这些工作在《十年来的中国科学（数学部分），1949 — 1959》一书中均有介绍。

在准解析函数类的研究方面，他在 40 年前即有两篇与此有紧密联系的论文由蒙泰尔推荐发表在巴黎科学院院报上。由于战争环境的影响，这方面的研究工作被迫中断；直至抗日战争胜利后，他才得以回到这一领域继续其研究工作，并在武汉大学理科季刊上发表了一批关于概周期函数的准解析性的判定准则，其中典型的结果在美国《数学评论》（1959 年第 10 期，701 页）上有所介绍。

由于他早期专攻复变函数论并希望探索一条数学理论联系实际的道路，因此，他一直关心微分方程的解析理论以及这门学科的广泛应用背景。在这方面，他从 40 年代起即影响了一些学生，让他们注意这一领域的研究及进展。中华人民共和国成立后，李国平着意建立一支微分方程的研究队伍。为此，1954 年他受教育部委托，与申又枨、吴新谋等合作，在北京举办了微分方程讨论班。他与申又枨主讲常微分方程的理论部分，为在中国建立微分方程的研究队伍做出了贡献。这一时期，他研究了与此有联系的自守函数、闵可夫斯基一当儒瓦函数的问题，着重研究了复变量的闵可夫斯基一当儒瓦函数问题，所得结果已收集在专著中。

此外，他将自己关于半纯函数、整函数与准解析函数的研究成果应用于常微分方程和差分方程的研究中，并研究了将函数构造理论的结果应用到微分方程理论中的问题。他还在国内外一些刊物上发表了一系列函数论方面的其他论文，包括函数构造理论的转化原则（间接方法与直接方法）、等角写像边界性质、全纯函数的边界性质、柯西型积分与奇异积分方程方面的普里瓦洛夫定理（或其推广）及其对弹性理论的应用，以及准解析函数与半纯函数理论对某些差分方程组的应用、拓扑群上的函数理论、普遍二

重级数、半纯函数的反函数等新的研究成果。特别是最近几年，他完成了《准解析函数论》、《推广的黎曼几何在偏微分方程中的应用》、《算子函数论》、《亚培尔函数论》等多种专著。这些都是他本人 30 年代工作的继续，对前人相应的工作都有所推进。

函数论规划

1956 年，李国平出席了全国 12 年科学远景规划会议，是数学组、计算技术组、半导体组和自动化组的成员，还是函数论规划的起草人。自此，他对祖国的未来更加充满信心，对各学科之间相互联系，相互渗透的科学技术发展趋势有了进一步的深刻认识。60 年代后，他毅然把注意力转向数学对国民经济与国防建设的实际应用，积极倡导数学同其他科学技术的边缘研究，大胆地提出了一种现在常被形象地称为“一个主体、两个翅膀”的科研设想。主体是数学、计算机科学与系统科学的三结合，发展数学、应用数学与计算数学，并开发系统科学的基础理论；一支翅膀是数学与物理科学相结合（包括天文、地学、化学以至工程技术），研究宇观、宏观与微观物理现象的数学规律性，为物理科学乃至工程技术服务；另一支翅膀是数学与生物科学相结合，研究运动形式的发展，特别是生物运动与生命运动的数学规律性，为生物科学乃至系统科学服务。他希望以此为线索探求数学应用的具体途径，并为纯数学提供新的内容、概念与方法，发展数学本身。

开辟新路

为了实现这一宿愿，他毅然部分地中断了他所熟悉的函数论方面的研究，30 年如一日，含辛茹苦地勤奋工作，在数学物理与系统科学两个领域为应用数学与数学的应用开辟新路，取得了一些重要成就。1961 年开始，他在电磁流体力学中从小扰动电磁流体力学波方程与传输线方程的相似性出发，提出了电磁流体力学波的特性阻抗概念，认为可以类似于电磁波中特性阻抗的作用，建立关于电磁流体力学波的工程理论。1976 年，他在研究地震的弹性波方程时使用同样的观点导出了地震弹性波的特性阻抗，探索了地震弹性波传播的工程理论。这在《数理地震学》的第一章中有详尽的论述。

1965 年间，他将纤维丛理论应用于基本粒子理论的研究，提出了纤维丛的微积分概念以探讨基本粒子的内外运动，所得结果被发表在《一般相对论量子场论》中。这工作的思想要点是：分别以狭义相对论与广义相对论描述基本粒子的内运动与外运动，前者的方程在经纤维丛积分后即可转化为后者的方程。由于狭义相对论的麦克斯韦方程可以有两种方式被推广为广义相对论的麦克斯韦方程，这种转化当然也是一变为二的。可以认为，这种一变为二是由外运动而引起的。据此，他大胆地提出了一个猜想：光子的反光子并不是它自身；由外运动引出的两种方程是分别描述正反两种光子的。目前所观察到的两者的同一性，很可能是我们尚未获得观察广义相对论性效应的客观条件的结果。这是与其他广义相对论性理论实验证明的预言相一致的，但有待于星光近日是否弯曲并获得两种数据的观测结果以证明它的最后真实性。

李国平在 1964 年带领学生参加葛洲坝工程建设之后，针对岩土力学的研究引进了地质点的概念，提出了岩石统计力学的理论框架。1972 年为了解决一位物理界的朋友提出的半导体各向异性能带问题，他以外微分形式为工具，系统地论述了现代数学物理中的 8 个分章内容，通过带关键性的半导体中导带电子有效质量张量与价带空穴有效质量张量概念的提出，确立了相应的运输方程，成功地建立了半导体的各向异性能带理论。他还在所著的《n 体问题》一书中，研究了牛顿天体力学中 n 体问题的相对论修正案，获得了二体问题相对论修正案行星运动的确解，并拟定了只考虑太阳对行星的引力作用而略去行星之间吸引的（n － 1）行星的相对论修正运动的摄动计算理论方案。他还在另外一些重要领域，比如计算机的研制与应用，控制论、系统科学等方面，作了大量指导性的乃至一些具体的研究工作。

正是通过这漫长而艰苦的奋斗过程，他不仅自身孜孜不倦忘我劳动，写了近 80 篇学术论文，在已出版的《函数论》、《数学物理》与《系统科学》三套丛书中，他撰有《半纯函数的聚值线理论》、《自守函数与闵可夫斯基函数》、《电磁风暴说》、《数理地震学》、《导体与半导体》、《一般相对论性量子场论》（Ⅰ与Ⅱ）、《推广的黎曼几何方法及其在偏微分方程中的应用》、《亚培尔函数论》、《算子函数论》以及《数学模型与工业自动控制》（1 － 3 卷）等共 18 部专著。李国平先后参与创建了中国科学院武汉数学物理研究所、数学计算技术研究所、国家科委计算机培训中心等科研机构，创建或恢复

了《数学物理学报》、《数学杂志》、《数学年刊》、《数学通讯》等学术刊物以及中国系统工程学会、湖北省系统工程学会、湖北省暨武汉市数学会等学术组织；1979 年与 1982 年他亲自组织主持召开了全国第一、二次“数学物理学术讨论会”，为形成上述研究领域蓬勃兴起的大好形势作出了积极贡献。

培养人才

李国平为中国的科学事业执著追求，奋斗不息，同时为发展中国的教育事业亦怀着“登高人向东风立，捧土培根情更急”的圣洁之情，为中国培养和造就了一批优秀专家学者，近百名教授是他的高足，更多的中青年在他的指导下迅速成长。

李国平毕生成就的另一方面是他数十年间撰写数百首诗词。早在中山大学攻读数学天文时，即兼修了中文系的古代文学等课程，对古典诗词产生了浓厚兴趣，含英咀华，打下了深厚基础。他的诗词之作题材丰富，笔力雄健，意境清新高远，语言朴实生动，铿然有金石声，如骊龙之珠抱而不脱，耐人寻味之作比比皆是。整个诗词确是他胸怀、心灵的写照，是作为科学家的良心与艺术家心灵相结合的体现。

李国平教授于 1996 年 2 月 8 日在武汉病逝，享年 86 岁。