迭代：$A\vec{x}=\vec{b}$.

设 $|A|\neq 0$、$\exists Q, C$ & $|Q|\neq 0$. s.t $A=Q-C$. 记为A的一个分裂

To. $A\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow (Q-C)\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow (I-Q^{-1}C)\vec{x}=Q^{-1}\vec{b}$ —— (*)

令 $B=Q^{-1}C$. $g=Q^{-1}b$. 则 (*) $\Leftrightarrow (I-B)x=g$

$\Rightarrow x=Bx+g$ —— (☆)　　call: 逐次逼近、$B\triangleq$"迭代矩阵"

Exc: $x_{k+1}=Bx_k+g$. 令 $x_k\to x^*$.

$\Rightarrow x^*=x_0^*$　为简化 x^* 记为 x''

proof: $x_{k+1}=x_0''$, $Bx_k''+g \to Bx_0''+g$ $(k\to\infty)$

$\Rightarrow x_0''=Bx_0''+g$ (☆)成立　$\therefore Ax_0''=\vec{b} \Rightarrow x_0''=x_0$.

$\therefore \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$.

Def 1. $\varepsilon_k = x_k - x^*$. $\triangleq$ 误差向量.

$\therefore \varepsilon_k = B^k(x_0-x^*)=B^k\varepsilon_0$

$\therefore \|\varepsilon_k\| \le \|B^k\|\,\|\varepsilon_0\| \le \|B\|^k\|\varepsilon_0\|$

Def 2. $R_k(B)=-k^{-1}\log\|B^k\|$ $\triangleq$ 平均收敛速度

Exc: if $\rho(B)<1$.

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\|B^k\|^{\frac{1}{k}}=\rho(B)$.

$\therefore R_\infty(B)=-\log\rho(B)$. $\triangleq$ 渐近收敛速度

Thm 1. 对 $\{x_k\}$. 任给一个 x_0. $\{x_k\}$ 有极限 $\Leftrightarrow \rho(B)<1$.

proof: $x_{k+1}-x^*=B(x_k-x^*)$

$\Rightarrow x_{k+1}-x^*=\cdots\cdots=B^{k+1}(x_0-x^*)$

$\therefore \lim_{k\to\infty} B^k=0 \Leftrightarrow \rho(B)<1$

Thm 2. if $\|B\|<1$. $x_k\to x_0'$ 有意义

proof: 由 $\rho(B)<\|B\|<1$

Thm 3. if $\|B\|<1$. $\Rightarrow \begin{cases} \|x_{k+1}-x^*\| \le \dfrac{\|B\|^{k+1}}{1-\|B\|}(\|x_1-x_0\|). \\ \|x_{k+1}-x^*\| \le \dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}(\|x_{k+1}-x_k\|) \end{cases}$

proof: 1. $\because \|x_{k+1}-x^*\|=\|B(x_k-x^*)\|$

$\le(\|x_{k+1}-x^*\|+\|x_{k+1}-x_k\|)\cdot\|B\|$.

&2. $\Rightarrow \|x_{k+1}-x^*\| = \dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x_{k+1}-x_k\|$

又 $\|x_{k+1}-x_k\| \le \|B\|^k\|x_1-x_0\|$

$\therefore \|x_{k+1}-x^*\| \le \dfrac{\|B\|^{k+1}}{1-\|B\|}\|x_1-x_0\|$.

1.

Jacobi: $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$, $|D|\neq 0$、 令 $A=D-(D-A)$.

$\therefore B=D^{-1}(D-A)=I-D^{-1}A$.　$g=D^{-1}b$.　$B\triangleq B_J$

若 $A=D-(L+U)$

并 $L\triangleq\begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & * & 0 & \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$　$U\triangleq\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & * & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

则 $B_J=D^{-1}(L+U)$

$\triangleq -\begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & * & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

记 $x_k=(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$

$\Rightarrow x_{k+1}=\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}=D^{-1}\left(-\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & * & \vdots \\ \vdots & * & 0 & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow x_i^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{ii}}\left[-\left(\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}+\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)+b_i\right]$ (①)

or $=\dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right]+x_i^{(k)}$ —— (②) 以②为主.

2. Gauss-Seidel: $A=(D-L)-U$

$\therefore B_{G\text{-}S}=(D-L)^{-1}U$. $g=(D-L)^{-1}b$.

$\therefore x_{k+1}=(D-L)^{-1}Ux_k+(D-L)^{-1}b$

$\Leftrightarrow (D-L)x_{k+1}=Ux_k+(D-L)^{-1}b \Leftrightarrow (I-D^{-1}L)x_{k+1}=D^{-1}Ux_k+D^{-1}b$.

$\Leftrightarrow x_{k+1}=D^{-1}(Lx_{k+1}+Ux_k+b)$

即: $\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}=D^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & * & 0 & \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right]$

$\therefore x_i^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$

(BOS)

3. 超松弛: 由 G-S: $\hat{x}_i^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$

令 $x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+w(\hat{x}_i^{(k+1)}-x_i^{(k)})$

$\Rightarrow x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+w\left[\dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right]-wx_i^{(k)}$

$\Rightarrow a_{ii}x_i^{(k+1)}+w\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}=a_{ii}(1-w)x_i^{(k)}-w\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}-wa_{ii}x_i^{(k)}+wa_{ii}x_i^{(k)}+wb$.

$\therefore Dx_{k+1}-wLx_{k+1}=D(1-w)x_k+wUx_k+wb$.

$\therefore (D-wL)x_{k+1}=(1-w)Dx_k+wUx_k+wb$

$\therefore x_{k+1}=(D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU]x_k+(D-wL)^{-1}wb$.

令 $B_w=(D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU]$. $g_w=w(D-wL)^{-1}b$.

$\therefore A=(w^{-1}D-L)-(-D+U+w^{-1}D)$.

Thm 1. $\rho(B_w)\ge|w-1|$. 并讨 BOS 收敛. 则 $0<w<2$.

proof: $|B_w|=(1-w)^n$　$\therefore \rho(B_w)\ge|w-1|$.

又 BOS 收敛 $\Rightarrow \rho(B)<1$

$\therefore |w-1|<1 \Rightarrow w\in(0,2)$.

§：范数

def 1：$\|\cdot\|: R^n \to R$ 为向量范数

if：1. 正定：$\forall x\in R^n$，有 $\|x\|\geq 0$ 且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$.

2. 齐次：$\forall x\in R^n, \alpha\in R$ 有：$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

3. 三角不等式：$\forall x,y\in R^n$ 有：$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

注：$\forall x,y\in R^n$ 有：$|\|x\|-\|y\|| \leq \|x-y\| \leq \max_{1\leq i\leq n}\|e_i\|\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|$（可证 $\|\cdot\|$ 为连续函数）

proof：① $\|x\|=\|x-y+y\|\leq\|x-y\|+\|y\|$

② 令 $x=\sum x_i e_i$, $y=\sum y_i e_i$.

$\therefore \|x-y\| = \|\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i-y_i|\|e_i\| \leq \max_{1\leq i\leq n}\|e_i\|\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|$

∴ ∎

有 P 范数：$\|x\|_p = (|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$，$p\geq 1$.

1 范数：$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$

2 范数：$\|x\|_2=\sqrt{x^Tx}$

∞范数：$\|x\|_p=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$　　可由凹凸性证.

注：Hölder 不等式：$|x^Ty|\leq\|x\|_p\|y\|_q$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$

注：范数等价性：

设 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$ 为 R^n 两个范数，则必存在 $c_1, c_2\in R$

s.t $\forall x\in R^n$ 有：$c_1\|x\|_\alpha\leq\|x\|_\beta\leq c_2\|x\|_\alpha$.

proof：引理：f 为闭集 S 的连续函数，则 $\max f(S)$ 与 $\min f(S)$ 的原象 $\in S$ 中.

作 $S=\{x \mid \|x\|_\beta=1\}$　则 S 为闭集

∵ $\|\cdot\|_\alpha$ 为连续函数.

∴ $\exists x_1,x_2\in S$. $\forall x\in S \Rightarrow \|x_1\|_\alpha\leq\|x\|_\alpha\leq\|x_2\|_\alpha$.

记 $\|x_1\|_\alpha=m$, $\|x_2\|_\alpha=M$.

∴ $\forall \|x\|_\alpha\in[m,M]$.

$\forall y\in R$. 则 $y/\|y\|_\beta\in S$ 中.

故　$m\leq\|\frac{y}{\|y\|_\beta}\|_\alpha\leq M$.

∴ 令 $c_1=m$, $c_2=M$ 即可　∎

注：$\|x\|_2\leq\|x\|_1\leq\sqrt{n}\|x\|_2$.

$\|x\|_\infty\leq\|x\|_2\leq\sqrt{n}\|x\|_\infty$

$\|x\|_\infty\leq\|x\|_1\leq n\|x\|_\infty$.

注：$\forall x_k\in R^n$，则 $\lim_{k\to\infty}\|x_k-x\|=0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}|x_i^{(k)}-x_i|=0$.

def 2. $\|\cdot\|: R^{n\times n}\to R$ 为矩阵范数.

if：正定、齐次、三角、相容1：$\forall A,B\in R^{n\times n}$ 有 $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$.

∵ $\forall A\in R^{n\times n}$　$A=\sum_{ij} a_{ij}E_{ij}$.　∴ 可将 A 看作向量

∴ 向量范数的性质在矩阵范数中成立.

Ex：$R^{n\times n}$ 上任两个矩阵范数等价

Ex：$\lim_{k\to\infty}\|A_k-A\|=0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$.

def 3. if $\|Ax\|_v\leq\|A\|_M\|x\|_v$, $\forall A\in R^{n\times n}$, $x\in R^n$.

则矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与 $\|\cdot\|_v$ 相容. 记相容2

注：$|||A||| = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$. $A\in R^{n\times n}$. $\|\cdot\|$ 为已定义的向量范数.

proof：作 $D=\{x \mid \|x\|=1\}$　∴ D 为 R^n 的有界闭集

而 $\|\cdot\|$ 为 R^n 的连续函数

∴ $\exists x_0\in D$. s.t $\|Ax_0\|=\max_{x\in D}\|Ax\|$

∴ 上式定义的 $|||\cdot|||$ 有意义.

又 $\forall x\in R^n$. $x\neq 0$.

∴ $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\|A\frac{x}{\|x\|}\|\leq|||A||| \Rightarrow \|Ax\|\leq|||A|||\,\|x\|$.

∴ 满足相容2.

下证：① 正定：$\forall A\neq 0$. 不妨设 $a_{11}\neq 0$，$x=e_1/\|e_1\|$

则 $|||A|||=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|\geq\|A\frac{e_1}{\|e_1\|}\|=\frac{\|(a_{11},x,x\cdots)^T\|}{\|e_1\|}$.

又 $(a_{11},x,x\cdots,x)^T\neq 0$.　∴ $\|Ae_1\|>0$.

故 $|||A|||>0$.　∴ 正定满足.

② 齐次：$\forall\alpha\in R$. $A\in R^{n\times n}$.

∴ $|||\alpha A|||=\max_{\|x\|=1}\|\alpha Ax\|=\max_{\|x\|=1}\alpha\|Ax\|=\alpha|||A|||$.

③ 三角：$\forall A, B\in R^{n\times n}$

$|||A+B|||=\|(A+B)x_0\|=\|Ax_0+Bx_0\|\leq\|Ax_0\|+\|Bx_0\|$

$\leq|||A|||+|||B|||$

④ 相容1. $\forall A,B\in R^{n\times n}$

$|||AB|||=\|ABx_0\|\leq|||A|||\,\|Bx_0\|\leq|||A|||\,|||B|||$.　∎

def 4. 上述 $|||\cdot|||$ 称为 $\|\cdot\|$ 诱导的矩阵范数（算子）

注：一般简化为 $\|\cdot\|$.

注：$\|A\|_p=\max_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p$.　$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

$\Rightarrow \|A\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$　（列范数）

$\|A\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$　（行范数）

$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$　（λ为特征根）

proof：① $\|Ax\|_1=\|\sum_{j=1}^n x_j\alpha_j\|_1\leq\sum_{j=1}^n|x_j|\|\alpha_j\|$

设 $\|\alpha_{j_0}\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$

∴ $\|Ax\|_1\leq\sum_{j=1}^n|x_j|\cdot\|\alpha_{j_0}\|_1$

又 $\|x\|_1=1$

∴ $\|Ax\|_1\leq\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|$.

下证取得到：令 $x=e_{j_0}$ 即可.

② $\|Ax\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j|\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}||x_j|$

$\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$.　　$\sigma_1=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$

下证取得到. 不妨令 σ_1 为 $\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$ 的行向量.

令 $x=(\mathrm{sgn}\,a_1,\cdots,\mathrm{sgn}\,a_n)$ 即可

③ $\|A\|_2=\sqrt{x^TA^TAx}$.

∵ A^TA 为半正定阵　∴ $\exists Q\in O(n,R)$.

s.t $Q^TAQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$　λ_i 为特征根 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$.

故 $x^TA^TAx=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i^2\leq\lambda_1\sum_{i=1}^n x_i^2=\lambda_1$.

∴ 下证取得到 令 $x=e_1$. 则 $e_1^TA^TAe_1=\lambda_1$ 即可　∎

def 5. Frobenius 范数：$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$

注：$\|Ax\|_2\leq\|A\|_F\cdot\|x\|_2$.

即 Frobenius 范数与 2 范数相容

注：$\|AB\|_F\leq\|A\|_F\|B\|_F$ ← 推出

def 6. A 的特征值的最大模为 $\rho(A)$.

记 $\rho(A)$ 为谱半径.

注：$\forall\|\cdot\|$ 为一矩阵范数. 则 $\rho(A)\leq\|A\|$.

proof：$Ax=\lambda x \Rightarrow Axe_1^T=\lambda xe_1^T$

$\Rightarrow\|Axe_1^T\|=\|\lambda xe_1^T\|=|\lambda|\|xe_1^T\|$

而 $\|Axe_1^T\|\leq\|A\|\|xe_1^T\|$

∴ $|\lambda|\leq\|A\| \Rightarrow \rho(A)\leq\|A\|$.

或用引理：$\forall\|\cdot\|$ 为矩阵范数 则必有 $\|\cdot\|'$ 为向量范数与 $\|\cdot\|$ 相容.

proof：$\|x\|'=\|x\alpha^T\|$

∴ $\|Ax\|'=\|Ax\alpha^T\|\leq\|A\|\|x\alpha^T\|=\|A\|\|x\|'$.

故 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|$ 相容.

注：对 $\rho(A)$ 有：

① $\forall$ 一矩阵范数 $\|\cdot\|$，s.t $\|A\|\geq\rho(A)$

② $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 一 $\|\cdot\|'$，s.t. $\rho(A)+\varepsilon>\|A\|'$

Proof：② A 的 Jordan 形：

$\exists X$ 可逆. s.t. $X^{-1}AX=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \delta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_n\\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$　δ_i = "0" or "1".　$\forall\varepsilon>0$：

令 $D=\mathrm{diag}(1,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{n-1})$

令 $\|A\|=\|D^{-1}X^{-1}AXD\|_\infty \Rightarrow$ 即可.

def 7. $A_k=(a_{ij}^{(k)})$，令 $A=(a_{ij})$. if：$\lim_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$.

则称 $\lim_{k\to\infty}A_k=A$. 称 A 收敛的

注：$A_k+B_k\to A+B$，$A_kB_k\to AB$，$\lambda_kA_k\to\lambda A$.

注：$A_k\to A \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\|A_k-A\|=0$.

$A^k\to 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\|A^k\|=0$

$\|A\|<1$ 可推（由 $\|A^k\|\leq\|A\|^k$）

注：A^k 收敛的 $\Leftrightarrow \rho(A)<1$

proof："⇒" 反设 $\rho(A)\geq 1$　则 $\exists|D|\geq 1$. "$Ax=Dx$"

又 $\|A^kx\|=\|D^kx\|=|D|^k\|x\|\geq\|x\|$

而 $\|A^kx\|\leq\|A^k\|\|x\| \Rightarrow \|A^k\|\geq 1$.

与 $A^k\to 0$ 矛盾！故 $\rho(A)<1$

"⇐" 当 $\rho(A)<1$　∴ ∃一个"$\|\cdot\|$". s.t $\|A\|<\rho(A)+\varepsilon<1$.

故由上 ⇒ A^k 收敛　∎

def 8. $S_k=\sum_{i=0}^k A_i$. 若 S_k 有极限 A^*. $\lim_{k\to\infty}S_k=A^*$.

则称矩阵无穷级数的和为 A^* 是收敛的

Ex：$\sum_{k=0}^\infty A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow A^k\to 0$ 且 $S_k\to(I-A)^{-1}$

proof："⇔" 此时作 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$.

故 $\Leftrightarrow\sum_{k=0}^\infty a_{ij}^{(k)}$ 收敛 $\Rightarrow a_{ij}^{(k)}\to 0 \Rightarrow A^k\to 0$.

此时由 $(I-A)(I+A+\cdots+A^k)=I-A^{k+1}$.

又 $A^k\to 0$. 故 $\rho(A)<1$ 故 $I-A$ 可逆

故 $k\to\infty$. 由 $A^k\to 0$. $\Rightarrow S_\infty=(I-A)^{-1}$

Ex：A 为实对称阵. 则 $\|A\|_2=\rho(A)$.

注：设 $\|x\|_p$ 诱导 $\|A\|_p$. $\forall\|A\|'$ 为矩阵范数（且与 $\|x\|_p$ 相容），有：$\|A\|_p\leq\|A\|'$

proof：$\exists x_0$. $\|x_0\|_p=1$ s.t $\|A\|_p=\|Ax_0\|_p$.

故 $\|A\|_p=\|Ax_0\|_p\leq\|A\|'\|x_0\|_p=\|A\|'$　∎

注：$\|A\|$ 为诱导算子，则 $\|I\|$ 必为 1.

proof：$\|I\|=\max_{\|x\|=1}\|Ix\|=\|x\|=1$

注：$\forall A\in M$. U、V 为正交阵. 则：

① $\|AU\|_2=\|UA\|_2=\|UAV\|_2=\|A\|_2$

② $\|AU\|_F=\|UA\|_F=\|UAV\|_F=\|A\|_F$

③ $\|A\|_2\leq\|A\|_F$

只 proof ③：A^TA 为半正定　∴ $A^TA\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

∴ $\lambda_{max}(A^TA)\leq tr(A^TA)=\sum\lambda_i$　∎

注：x、y 为长度为 1 的单位向量. 则 $\|A\|_2=\max_{\|x\|_2=\|y\|_2=1}|y^TAx|$ ①

$\|A\|_2=\|A^T\|_2$ ②.

proof：① ∵ $|y^TAx|\leq\|y\|_2\|Ax\|_2$

故 $\|A\|_2=\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2\geq|y^TAx|$.

下证可达到：令 $y=\frac{Ax}{\|Ax\|_2} \Rightarrow |y^TAx|=|\frac{x^TA^TAx}{\|Ax\|_2}|=\|Ax\|_2$

现令 x 满足 $\|A\|_2=\|Ax\|_2$ 即可　∎

② $\|A^T\|_2=\max_{\|x\|_2=\|y\|_2=1}|y^TA^Tx|=\max|x^TAy|=\|A\|_2$　∎

$A\in M_n$.

Ex：$\|A\|<1$ 则 $\|(I-A)^{-1}\|\leq\frac{1}{1-\|A\|}$

proof：∵ $\|A\|<1$　∴ $I-A$ 可逆且 $\rho(A)<1 \Rightarrow A^k\to 0$

故 $\|(I-A)^{-1}\|=\|\sum_{k=0}^\infty A^k\|\leq\sum_{k=0}^\infty\|A^k\|\leq\frac{1}{1-\|A\|}$　∎

注：A 可逆. 若 $\|A^{-1}B\|<1$，则 $A+B$ 可逆且 $\|(A+B)^{-1}\|\leq\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}B\|}$

proof：∵ $\|A^{-1}B\|<1 \Rightarrow I+A^{-1}B$ 可逆

又 A 可逆 $\Rightarrow A(I+A^{-1}B)=A+B$ 可逆

又 ∵ $\|(A+B)^{-1}\|=\|A^{-1}(I+A^{-1}B)^{-1}\|\leq\|A^{-1}\|\cdot\frac{1}{1-\|A^{-1}B\|}$　∎

注：$\sum_{k=0}^\infty A^k$ 收敛 $\Rightarrow \|(I-A)^{-1}-\sum_{k=0}^m A^k\|\leq\|A\|^{m+1}/1-\|A\|$.

proof：∴ $A^k\to 0$. 又 $(I-A)^{-1}-\sum_{k=0}^m A^k=\sum_{k=m+1}^\infty A^k$

⇒ 故 $\|(I-A)^{-1}-\sum_{k=0}^m A^k\|=\|\sum_{k=m+1}^\infty A^k\|\leq\sum_{k=m+1}^\infty\|A\|^k=\frac{\|A\|^{m+1}}{1-\|A\|}$

§. 敏度分析

$Ax=b \Rightarrow (A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$.

∵ 当 $A+\delta A$ 可逆时有：$\|(I+A^{-1}\delta A)^{-1}\|\leq\frac{1}{1-\|A^{-1}\delta A\|}\leq\frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}$

故由 $\delta x=(A+\delta A)^{-1}(\delta b-\delta Ax)$

$=(I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b-\delta Ax)$.

$\Rightarrow\|\delta x\|\leq\|(I+A^{-1}\delta A)^{-1}\|\|A^{-1}\|\|\delta b-\delta Ax\|$.

$\leq\frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\|A^{-1}\|(\|\delta b\|+\|\delta Ax\|)$

$\leq\frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\|A^{-1}\|(\|\delta b\|+\|\delta A\|\|x\|)$

∴ $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leq\frac{1}{1-\|A^{-1}\|\cdots}\|A^{-1}\|(\frac{\|\delta b\|}{\|x\|}+\|\delta A\|)$

∵ $b=Ax \Rightarrow \|b\|\leq\|A\|\|x\|$

∴ $\leq\frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\|A^{-1}\|(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\|A\|+\|\delta A\|)$

$\leq\frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|})$

故 $\|A^{-1}\|\cdot\|A\|=K(A)$（条件数）决定了"病态"

def 1：$\|A^{-1}\|\|A\|$ 为条件数，记为 $K(A)$ ⇒ x 相对误差由 A 与 b 误差放大 K(A) 倍而成.

注：$K(A)$ 大 → 病态，$K(A)$ 小 → 良态

注：若 $\|I\|=1$. $\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|<1$. 则 $\frac{\|(A+\delta A)^{-1}-A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|}\leq\frac{K(A)}{1-K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$.

注：$\min\{\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}: A+\delta A$ 奇异. A 可逆$\}$

$=\frac{1}{\|A^{-1}\|_2\|A\|_2}=\frac{1}{K_2(A)}$

Proof：此时 $\|A^{-1}\|_2\|\delta A\|_2$ 必 ≥ 1. 故 $\min\{\|\delta A\|_2: A+\delta A$ 奇异$\}\geq\frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$

下证取得到 $\frac{1}{\|A\|_2}$：

∵ $\exists x$ s.t $\|A^{-1}\|_2=\|A^{-1}x\|_2$　令 $y=\frac{A^{-1}x}{\|A^{-1}x\|_2}$，$\delta A=-\frac{xy^T}{\|A^{-1}\|_2}$

$\|\delta A\|_2=\max_{\|z\|_2=1}\|\delta Az\|_2=\max_{\|z\|_2=1}\|\frac{xy^T}{\|A^{-1}\|_2}z\|=\frac{\|x\|_2}{\|A^{-1}\|_2}\max_{\|z\|_2=1}|y^Tz|=\frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$　∎

注：① $K_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$

② 用 σ_1^2、σ_n^2 表示 A^TA max、min 特征值 $\Rightarrow K_2(A)=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2=\sigma_1/\sigma_n$

③ A 为对称阵. $K_2(A)=|\lambda|_{max}/|\lambda|_{min}$.　④ $K(A)\geq 1$. 当 A 正交 $\Rightarrow K_2(A)=1$　⑤ $K(\lambda A)=K(A)$.